

Le Neighbor-Joining (NJ)

Celine Brochier

celine.brochier@up.univ-mrs.fr

<http://194.57.197.233:800/>

04.91.10.64.75

Méthodes de distances

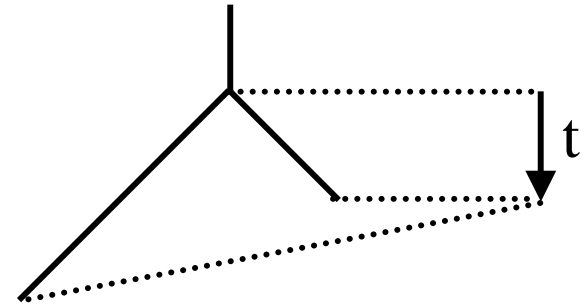
- Famille majeure de méthodes phylogénétiques
- Introduites par Cavalli-Sforza et Edwards (1967) et par Fitch et Margoliash (1967)
- Fortement influencées par l'algorithme de clustering de Sokal et Sneath (1963)
- Calculer ou estimer une mesure de la distance évolutive entre chaque paire de taxa => Matrice de distances
- Trouver un arbre phylogénétique qui reproduise les distances observées le plus fidèlement possible

Méthodes de distances

- Basées sur le calcul de distances évolutives séparant des séquences homologues
 - La distance évolutive estimée entre des séquences homologues \Leftrightarrow f(divergence observée entre des paires de séquences homologues)
 - Plus deux séquences homologues sont différentes, plus la distance évolutive qui les sépare est grande \Leftrightarrow plus les séquences ont divergé il y a longtemps
 - Plus deux séquences homologues sont proches, plus la distance évolutive qui les sépare est faible

Distances évolutives

- La notion de distances découle naturellement de celle de similitude :
 - Plus la similitude entre deux séquences S_{ij} est forte, plus la distance entre elles D_{ij} est faible
- Elles reflètent la quantité d'évolution survenue pendant un temps t
- Elles ne sont pas une simple fonction de temps
 - Ex: deux séquences qui sont groupe frère dans une phylogénie sont séparées par le même intervalle de temps t , mais peuvent avoir subi une quantité d'évolution différente
 - Quantité d'évolution = $r_i \times t_i$ (r_i = taux d'évolution)



Modèles d'évolution

- Les modèles d'évolution reflètent la manière dont les séquences évoluent \Leftrightarrow Permettent de faire le lien entre divergence observée et la quantité d'évolution survenue
- Les modèles d'évolution sont plus ou moins complexes \Leftrightarrow réalistes
- Plus le modèle choisi sera proche des conditions sous lesquelles les séquences évoluent, plus les distances estimées seront proches des distances réelles
- Exemple de modèles d'évolution
 - Jukes et Cantor (ADN)
 - Kimura 2 paramètres (ADN)
 - JTT (Protéines)
 - ...
- Comparaison des séquences \Rightarrow calcul d'une matrice de distances \Rightarrow inférer une phylogénie

Méthodes de distances

- Il existe de nombreuses méthodes de reconstruction de distances
 - Méthode des moindres carrés
 - Minimise la différence entre la longueur des branches de l'arbre inféré et les distances observées dans la matrice
 - Minimum d'évolution
 - La longueur totale de l'arbre inféré doit être la plus courte possible
- ⇒ Méthodes qui impliquent d'examiner toutes les topologies possibles
- ⇒ Inapplicables pour un nombre de taxa > 15

Méthodes de distances

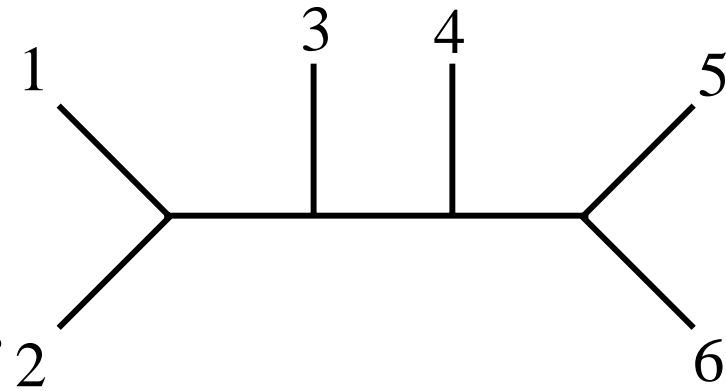
- Utilisation d'heuristiques basées sur des algorithmes de clustering qui n'examinent pas toutes les topologies possibles
 - Neighbor-Joining
 - UPGMA...

Le Neighbor-Joining

- Heuristique basée sur le principe du minimum d'évolution (Saitou et Nei 1987)
 - Algorithme d'agglomération
 - N'examine pas toutes les topologies possibles
 - Donne les mêmes résultats que le ME lorsque le nombre de taxa $m = 4$ ou 5
 - Permet l'obtention d'arbres très rapidement

Principe du Neighbor-Joining

- Le terme Neighbor (=voisin) désigne 2 taxa dans l'arbre reliés par un seul nœud dans un arbre non raciné
 - 1 et 2 sont voisins
 - 5 et 6 sont voisins
- Si on relie (1,2) alors (1,2) et 3 sont voisins
- Si on relie (1,2,3) alors (1,2,3) et 4 sont voisins
- Si on relie (1,2,3,4) alors (1,2,3,4) et (5,6) sont voisins
- De proche en proche , si on part d'un arbre en étoile où aucune relation de parenté est connue, on peut obtenir la topologie d'un arbre

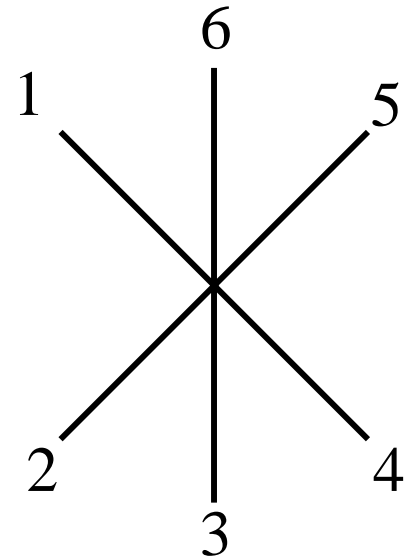


Algorithme du Neighbor-Joining

- On part d'un arbre en étoile dans lequel on ne suppose aucun cluster de taxa
 - Recherche du couple de taxa i et j qui une fois clusterisé minimise la longueur totale de l'arbre
 - Recalcul de la matrice de distances en considérant les taxa i et j comme un groupe (i,j) indissociable
 - Réitération jusqu'à ce qu'il ne reste plus de taxa dans la matrice

Arbre en étoile

- On part d'un arbre en étoile dans lequel on ne suppose aucun cluster de taxa
- ⇒ Il y a peu de chances que cet arbre soit le plus court possible
- ⇒ $S_O = \Sigma$ longueurs de branches de l'arbre en étoile
- ⇒ $S_{NJ} = \Sigma$ longueurs de branches de l'arbre NJ
- ⇒ $S_O < S_{NJ}$

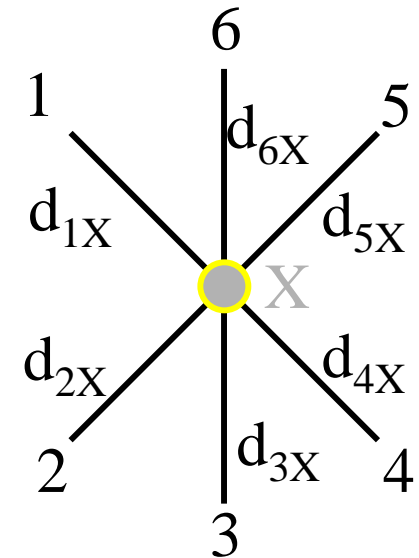


Calcul de S_o

- On appelle X le nœud central
 - $S_o = d_{1X} + d_{2X} + d_{3X} + d_{4X} + d_{5X} + d_{6X} = \sum_{i=1}^m diX$
- or les d_{iX} sont inconnues

=> Expression des d_{iX} en fonction des d_{ij} qui sont estimées à partir de la matrice de distances

=> Expression de la distance parcourue pour aller de chaque taxon à un autre taxon



Calcul de S_0

- Expression de tous les chemins possibles pour aller d'un taxon à l'autre

– De 1 à j

- $d_{12} = d_{1X} + d_{2X}$
- $d_{13} = d_{1X} + d_{3X}$
- $d_{14} = d_{1X} + d_{4X}$
- $d_{15} = d_{1X} + d_{5X}$
- $d_{16} = d_{1X} + d_{6X}$

on parcourt $m-1$ fois la distance d_{1X}

on parcourt 1 fois la distance d_{2X}

on parcourt 1 fois la distance d_{3X}

on parcourt 1 fois la distance d_{4X}

on parcourt 1 fois la distance d_{5X}

on parcourt 1 fois la distance d_{6X}

$$\sum_{j>1}^m d1j$$

– De 2 à j ($j>2$)

- $d_{23} = d_{2X} + d_{3X}$
- $d_{24} = d_{2X} + d_{4X}$
- $d_{25} = d_{2X} + d_{5X}$
- $d_{26} = d_{2X} + d_{6X}$

on parcourt $m-2$ fois la distance d_{2X}

on parcourt 1 fois la distance d_{3X}

on parcourt 1 fois la distance d_{4X}

on parcourt 1 fois la distance d_{5X}

on parcourt 1 fois la distance d_{6X}

$$\sum_{j>2}^m d2j$$

– De 3 à j ($j>4$)

- $d_{34} = d_{3X} + d_{4X}$
- $d_{35} = d_{3X} + d_{5X}$
- $d_{36} = d_{3X} + d_{6X}$

on parcourt $m-3$ fois la distance d_{3X}

on parcourt 1 fois la distance d_{4X}

on parcourt 1 fois la distance d_{5X}

on parcourt 1 fois la distance d_{6X}

$$\sum_{j>3}^m d3j$$

– De 4 à j ($j>5$)

- $d_{45} = d_{4X} + d_{5X}$
- $d_{46} = d_{4X} + d_{6X}$

on parcourt $m-4$ fois la distance d_{4X}

on parcourt 1 fois la distance d_{5X}

on parcourt 1 fois la distance d_{6X}

$$\sum_{j>4}^m d4j$$

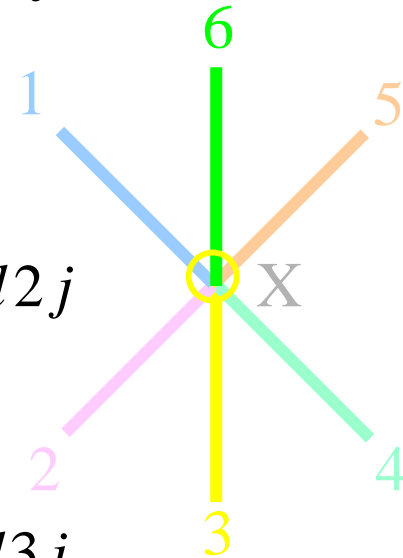
– De 5 à j ($j=6$)

- $d_{56} = d_{5X} + d_{6X}$

on parcourt 1 fois la distance d_{5X}

on parcourt 1 fois la distance d_{6X}

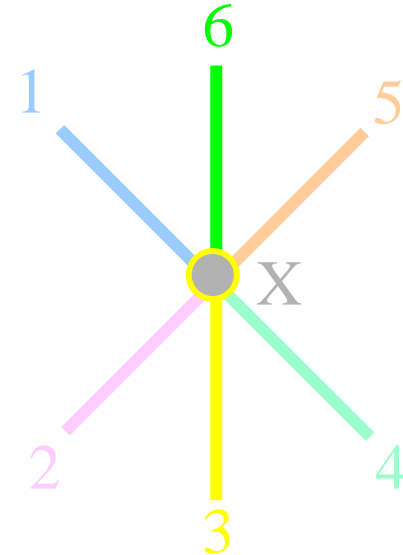
$$\sum_{j>5}^m d5j$$



Calcul de SO

- Total

- On parcourt $m-1$ fois d_{1X}
- On parcourt $m-2 + 1 =$
- On parcourt $m-3 + 1 + 1 = m-1$ fois d_{3X}
- On parcourt $m-4 + 1 + 1 + 1 = m-1$ fois d_{4X}
- On parcourt $m-5 + 1 + 1 + 1 + 1 = m-1$ fois d_{5X}
- On parcourt $1 + 1 + 1 + 1 + 1$ fois = $m-1$ fois d_{6X}



$$\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m dij = (m-1)d_{1X} + (m-1)d_{2X} + (m-1)d_{3X} + (m-1)d_{4X} + (m-1)d_{5X} + (m-1)d_{6X}$$

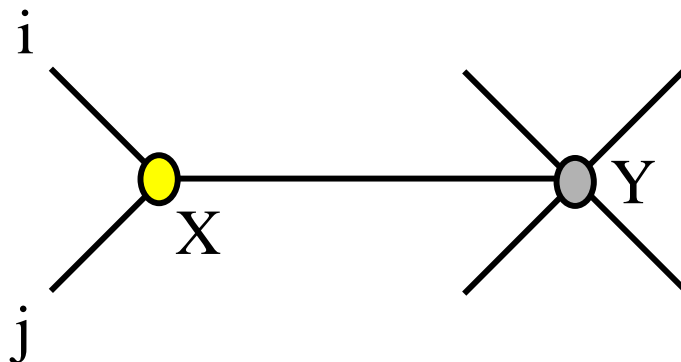
$$= (m-1)x(d_{1X} + d_{2X} + d_{3X} + d_{4X} + d_{5X} + d_{6X})$$

$$= (m-1)S_0$$

$$S_0 = \frac{1}{m-1} x \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m dij$$

Recherche du couple de voisins i et j qui minimise la longueur totale de l'arbre

- $S_0 > S_{ij} > S_{NJ}$
- On va tester tous les couples de voisins possibles, calculer la longueur de l'arbre obtenu
- On retient le couple i,j qui minimise S_{ij}



Généralisation au couple i, j

$$S_{12} = \frac{1}{2x(m-2)} [2T - R_1 - R_2] + \frac{d_{12}}{2}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2x(m-2)} [2T - R_i - R_j] + \frac{d_{ij}}{2}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2x(m-2)} [2T - R_i - R_j + (m-2)d_{ij}]$$

Choix de l'arbre

- T ne dépend pas du couple (i,j)
- L'arbre qui minimise d_{ij} est l'arbre qui minimise

$$S_{ij} = \frac{1}{2x(m-2)} [2T - R_i - R_j + (m-2)d_{ij}]$$

- L'étape 1 consiste à trouver le couple i,j qui minimise S_{ij}

Calcul de la longueur des branches

- Une fois déterminée le couple i, j qui minimise $S_{i,j}$, on définit un nouveau nœud A qui relie i et j
- La longueur des branches est donnée par l'équation

$$d_{Ai} = \frac{1}{2(m-2)} [(m-2)d_{ij} + R_i - R_j]$$

$$d_{Aj} = \frac{1}{2(m-2)} [(m-2)d_{ij} + R_j - R_i]$$

Recalcul de la matrice de distances

- La distance entre le nouveau nœud A et tout taxon k différent de i et j

$$d_{Ak} = \frac{1}{2} (d_{ik} + d_{jk} - d_{ij})$$

Réitération de l'algorithme pour
une matrice de taille $(m-1) \times (m-1)$

Matrice de ditances



	Chien	Ours	Racoon	Belette	Phoque	Otarie	Chat	Singe
Chien	0							
Ours	32	0						
Racoon	48	26	0					
Belette	51	34	42	0				
Phoque	50	29	44	44	0			
Otarie	48	33	44	38	24	0		
Chat	98	84	92	86	89	90	0	
Singe	148	136	152	142	142	142	148	0

Matrice de distances extraite de Sarich 1969

Algorithme

- Pour chaque feuille calculer $u_i = R_i / (m-2)$
- Choisir i et j pour lesquels $d_{ij} - u_i - u_j$ est la plus petite
- Joindre i et j . Calculer la longueur de la branche i au nouveau nœud v_i et j au nouveau nœud v_j comme étant
 - $v_i = d_{ij}/2 + (u_i - u_j)/2$
 - $v_j = d_{ij}/2 + (u_j - u_i)/2$
- Calculer la distance entre le nouveau nœud (ij) et chaque autre feuille comme
 - $d(ij),k = (d_{ik} + d_{jk} - d_{ij}) / 2$
- Éliminer les colonnes et les lignes correspondant aux groupes i et j et ajouter celles correspondant au nouveau groupe (ij)
- Si il reste un seul élément dans la matrice connecter les deux derniers nœuds, sinon retourner en 1

1. Pour chaque feuille calculer $u_i = \sum_{j:j \neq i}^n D_{ij} / (n-2)$
2. Choisir i et j pour lesquels $D_{ij} - u_i - u_j$ est la plus petite
3. Joindre i et j . Calculer la longueur de la branche i au nouveau nœud v_i et j au nouveau nœud v_j comme étant
$$v_i = D_{ij}/2 + (u_i - u_j)/2$$
$$v_j = D_{ij}/2 + (u_j - u_i)/2$$
4. Calculer la distance entre le nouveau nœud (ij) et chaque autre feuille comme
$$D_{(ij),k} = (D_{ik} + D_{jk} - D_{ij}) / 2$$
5. Éliminer les colonnes et les lignes correspondant aux groupes i et j et ajouter celles correspondant au nouveau groupe (ij)
6. Si il reste un seul élément dans la matrice connecter les deux derniers nœuds, sinon retourner en 1.



	Chien	Ours	Racoon	Belette	Phoque	Otarie	Chat	Singe
Chien	0							
Ours	32	0						
Racoon	48	26	0					
Belette	51	34	42	0				
Phoque	50	29	44	44	0			
Otarie	48	33	44	38	24	0		
Chat	98	84	92	86	89	90	0	
Singe	148	136	152	142	142	142	148	0
u_i	79,167	62,333	74,667	72,833	70,333	69,833	114,5	168,333

$$u_i = \sum_{j:j \neq i}^n D_{ij} / (n-2)$$

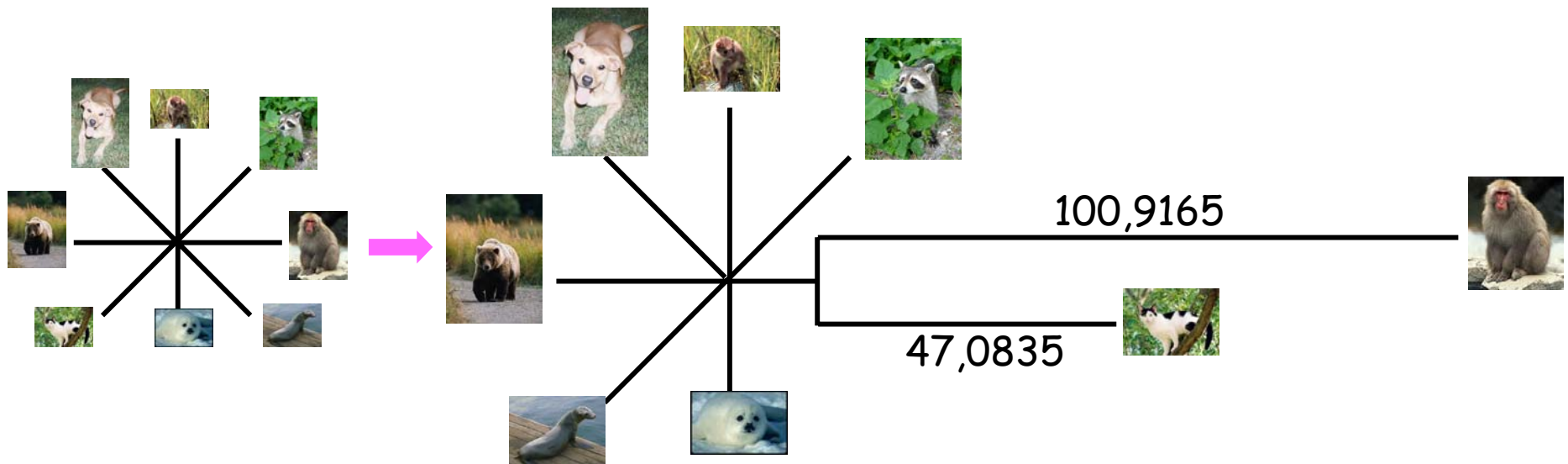
1. Pour chaque feuille calculer $u_i = \sum_{j:j \neq i}^n D_{ij} / (n-2)$
2. Choisir i et j pour lesquels $D_{ij} - u_i - u_j$ est la plus petite
3. Joindre i et j . Calculer la longueur de la branche i au nouveau nœud v_i et j au nouveau nœud v_j comme étant
$$v_i = D_{ij}/2 + (u_i - u_j)/2$$
$$v_j = D_{ij}/2 + (u_j - u_i)/2$$
4. Calculer la distance entre le nouveau nœud (ij) et chaque autre feuille comme
$$D_{(ij),k} = (D_{ik} + D_{jk} - D_{ij}) / 2$$
5. Éliminer les colonnes et les lignes correspondant aux groupes i et j et ajouter celles correspondant au nouveau groupe (ij)
6. Si il reste un seul élément dans la matrice connecter les deux derniers nœuds, sinon retourner en 1.



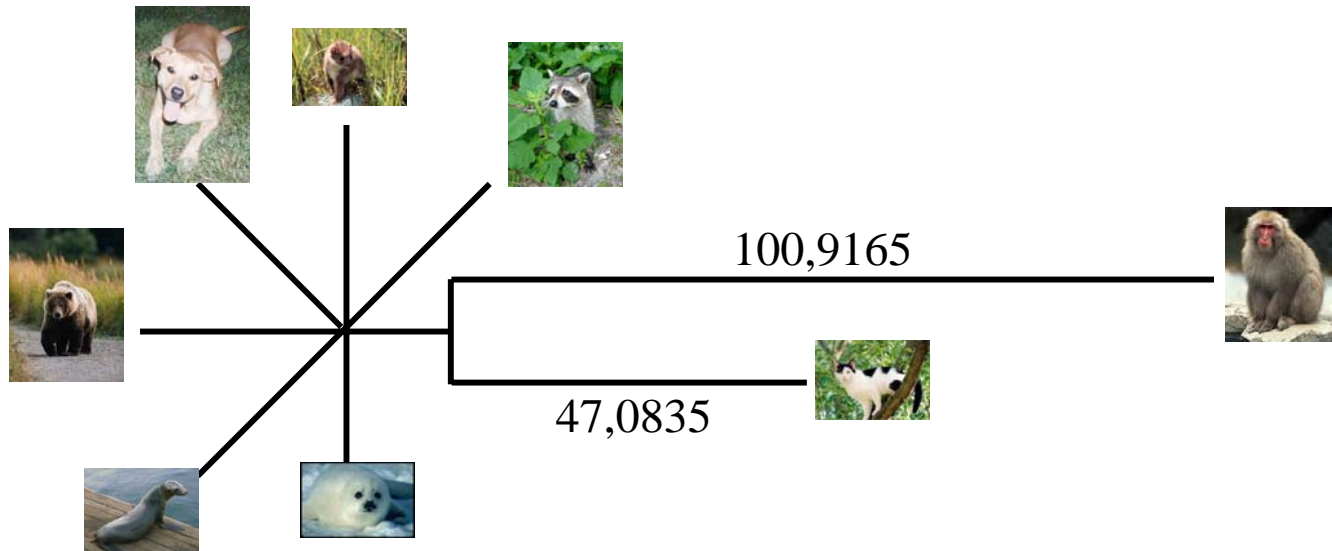
	Chien	Ours	Racoon	Belette	Phoque	Otarie	Chat	Singe
Chien	0	-109,5	-105,834	-101	-99,5	-101	-95.667	-99,5
Ours	32	0	-111	-101,166	-103,666	-99,166	-92,833	-94,666
Racoon	48	26	0	-105,5	-101	-100,5	-97,167	-91
Belette	51	34	42	0	-99,166	-104,666	-101,333	-99,166
Phoque	50	29	44	44	0	-116,166	-95.833	-96,666
Otarie	48	33	44	38	24	0	-94,333	-96,166
Chat	98	84	92	86	89	90	0	-134,833
Singe	148	136	152	142	142	142	148	0
u_i	79,167	62,333	74,667	72,833	70,333	69,833	114,5	168,333

$D_{ij} = u_i - u_j$, exemple Ours/Chien : $32 - 79,167 - 62,333 = -109,5$

1. Pour chaque feuille calculer $u_i = \sum_{j:j \neq i}^n D_{ij} / (n-2)$
2. Choisir i et j pour lesquels $D_{ij} - u_i - u_j$ est la plus petite
3. Joindre i et $j \Leftrightarrow$ joindre chat et singe. Calculer la longueur de la branche i (chat) au nouveau nœud vi et j (singe) au nouveau nœud vj comme étant
 $v_i = D_{ij}/2 + (u_i - u_j)/2 \Leftrightarrow D_{\text{chat-singe}}/2 + (114.5 - 168.333)/2 = 47.0835$
 $v_j = D_{ij}/2 + (u_j - u_i)/2 \Leftrightarrow D_{\text{singe-singe}}/2 + (168.333 - 114.5)/2 = 100,9165$
4. Calculer la distance entre le nouveau nœud (ij) et chaque autre feuille comme
 $D_{(ij),k} = (D_{ik} + D_{jk} - D_{ij}) / 2$
5. Éliminer les colonnes et les lignes correspondant aux groupes i et j et ajouter celles correspondant au nouveau groupe (ij)
6. Si il reste un seul élément dans la matrice connecter les deux derniers nœuds, sinon retourner en 1.



1. Pour chaque feuille calculer $u_i = \sum_{j:j \neq i} D_{ij} / (n-2)$
2. Choisir i et j pour lesquels $D_{ij} - u_i - u_j$ est la plus petite
3. Joindre i et j . Calculer la longueur de la branche i au nouveau nœud v_i et j au nouveau nœud v_j
4. Calculer la distance entre le nouveau nœud (ij) et chaque autre feuille comme $D_{(ij),k} = (D_{ik} + D_{jk} - D_{ij}) / 2$
5. Éliminer les colonnes et les lignes correspondant aux groupes i et j et ajouter celles correspondant au nouveau groupe (ij)
6. Si il reste un seul élément dans la matrice connecter les deux derniers nœuds, sinon retourner en 1.

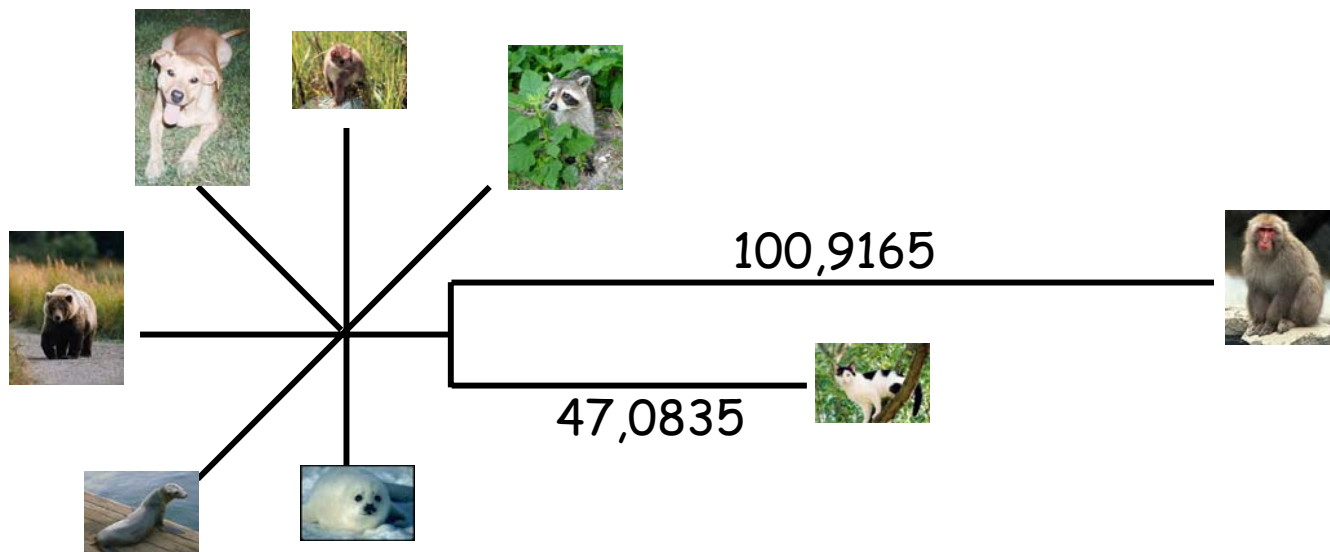




	Chien	Ours	Racoon	Belette	Phoque	Otarie	Chat	Singe
Chien	0							
Ours	32	0						
Racoon	48	26	0					
Belette	51	34	42	0				
Phoque	50	29	44	44	0			
Otarie	48	33	44	38	24	0		
Chat	$(98+148-148)/2 = 49$	$(84+136-148)/2 = 36$	$(92+152-148)/2 = 48$	$(86+142-148)/2 = 40$	$(89+142-148)/2 = 41,5$	$(90+142-148)/2 = 42$		
Singe	98	84	92	86	89	90	0	
Chat	148	136	152	142	142	142	148	0
Singe								

$$D_{(ij),k} = (D_{ik} + D_{jk} - D_{ij}) / 2$$

1. Pour chaque feuille calculer $u_i = \sum_{j:j \neq i}^n D_{ij} / (n-2)$
2. Choisir i et j pour lesquels $D_{ij} - u_i - u_j$ est la plus petite
3. Joindre i et j . Calculer la longueur de la branche i au nouveau nœud v_i et j au nouveau nœud v_j
4. Calculer la distance entre le nouveau nœud (ij) et chaque autre feuille comme $D_{(ij),k} = (D_{ik} + D_{jk} - D_{ij}) / 2$
5. **Éliminer les colonnes et les lignes correspondant aux groupes i et j et ajouter celles correspondant au nouveau groupe (ij)**
6. Si il reste un seul élément dans la matrice connecter les deux derniers nœuds, sinon retourner en 1.





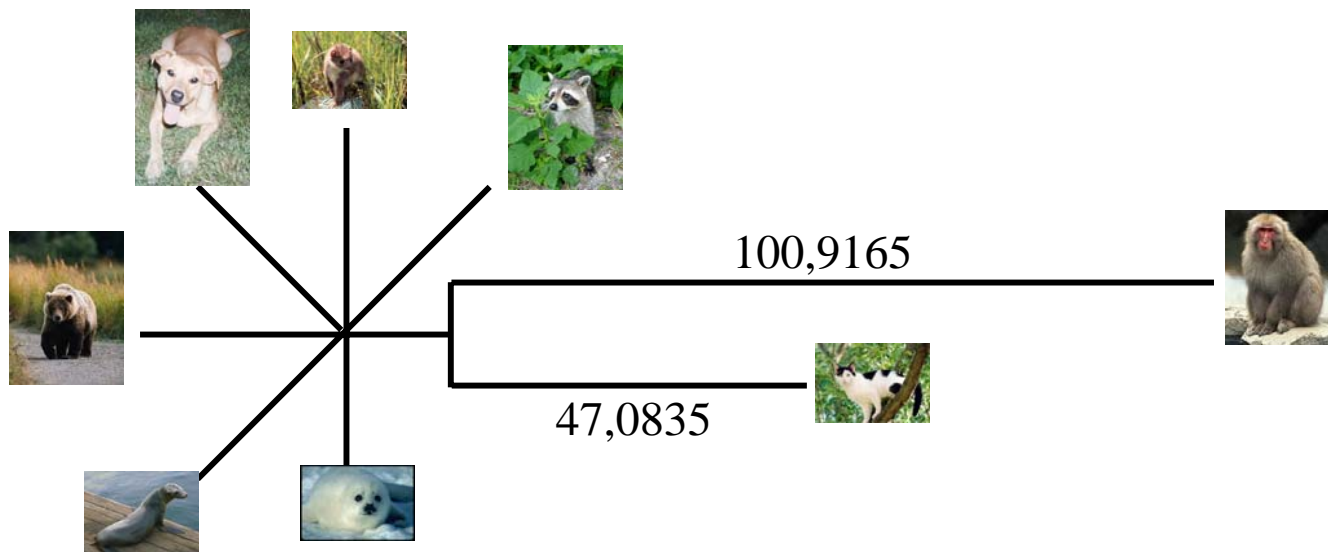
	Chien	Ours	Racoon	Belette	Phoque	Otarie	Chat	Singe
Chien	0							
Ours	32	0						
Racoon	48	26	0					
Belette	51	34	42	0				
Phoque	50	29	44	44	0			
Otarie	48	33	44	38	24	0		
Chat	49	36	48	40	41,5	42		
Singe								
Chat	98	84	92	86	89	90	0	
Singe	148	136	152	142	142	142	148	0

Supprimer les colonnes du chat et du singe

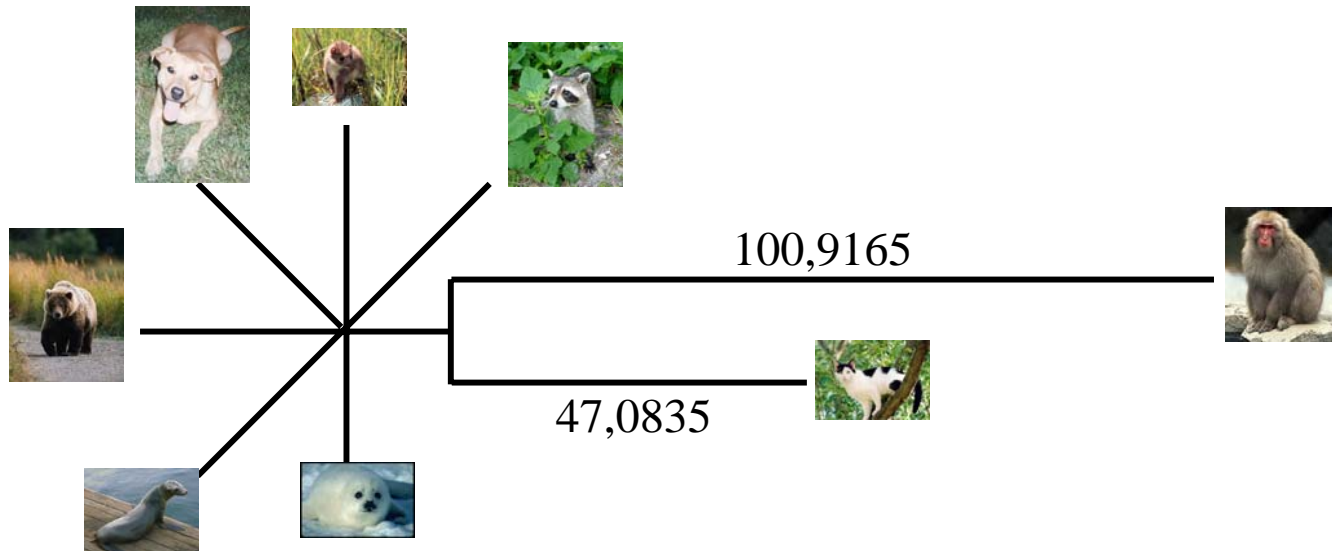


	Chien	Ours	Racoon	Belette	Phoque	Otarie	Chat Singe
Chien	0						
Ours	32	0					
Racoon	48	26	0				
Belette	51	34	42	0			
Phoque	50	29	44	44	0		
Otarie	48	33	44	38	24	0	
Chat Singe	49	36	48	40	41,5	42	0

1. Pour chaque feuille calculer $u_i = \sum_{j:j \neq i} D_{ij} / (n-2)$
2. Choisir i et j pour lesquels $D_{ij} - u_i - u_j$ est la plus petite
3. Joindre i et j . Calculer la longueur de la branche i au nouveau nœud v_i et j au nouveau nœud v_j
4. Calculer la distance entre le nouveau nœud (ij) et chaque autre feuille comme $D_{(ij),k} = (D_{ik} + D_{jk} - D_{ij}) / 2$
5. Éliminer les colonnes et les lignes correspondant aux groupes i et j et ajouter celles correspondant au nouveau groupe (ij)
6. Si il reste un seul élément dans la matrice connecter les deux derniers nœuds, sinon retourner en 1.



1. Pour chaque feuille calculer $u_i = \sum_{j:j \neq i}^n D_{ij} / (n-2)$
2. Choisir i et j pour lesquels $D_{ij} - u_i - u_j$ est la plus petite
3. Joindre i et j . Calculer la longueur de la branche i au nouveau nœud v_i et j au nouveau nœud v_j
4. Calculer la distance entre le nouveau nœud (ij) et chaque autre feuille comme $D_{(ij),k} = (D_{ik} + D_{jk} - D_{ij}) / 2$
5. Éliminer les colonnes et les lignes correspondant aux groupes i et j et ajouter celles correspondant au nouveau groupe (ij)
6. Si il reste un seul élément dans la matrice connecter les deux derniers nœuds, sinon retourner en 1.

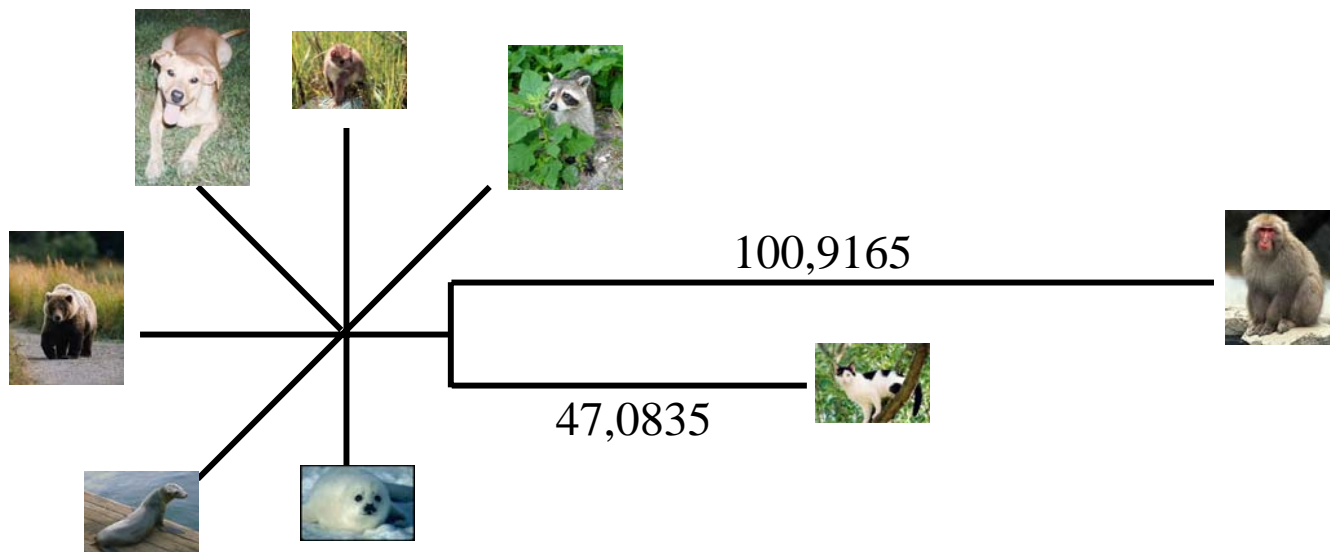




	Chien	Ours	Racoon	Belette	Phoque	Otarie	Chat Singe
Chien	0						
Ours	32	0					
Racoon	48	26	0				
Belette	51	34	42	0			
Phoque	50	29	44	44	0		
Otarie	48	33	44	38	24	0	
Chat Singe	49	36	48	40	41,5	42	0
u_i	55,6	38	50,4	49,8	46,5	45,8	51,3

$$u_i = \sum_{j:j \neq i}^n D_{ij} / (n-2)$$

1. Pour chaque feuille calculer $u_i = \sum_{j:j \neq i}^n D_{ij} / (n-2)$
2. Choisir i et j pour lesquels $D_{ij} - u_i - u_j$ est la plus petite
3. Joindre i et j . Calculer la longueur de la branche i au nouveau nœud v_i et j au nouveau nœud v_j
4. Calculer la distance entre le nouveau nœud (ij) et chaque autre feuille comme $D_{(ij),k} = (D_{ik} + D_{jk} - D_{ij}) / 2$
5. Éliminer les colonnes et les lignes correspondant aux groupes i et j et ajouter celles correspondant au nouveau groupe (ij)
6. Si il reste un seul élément dans la matrice connecter les deux derniers nœuds, sinon retourner en 1.





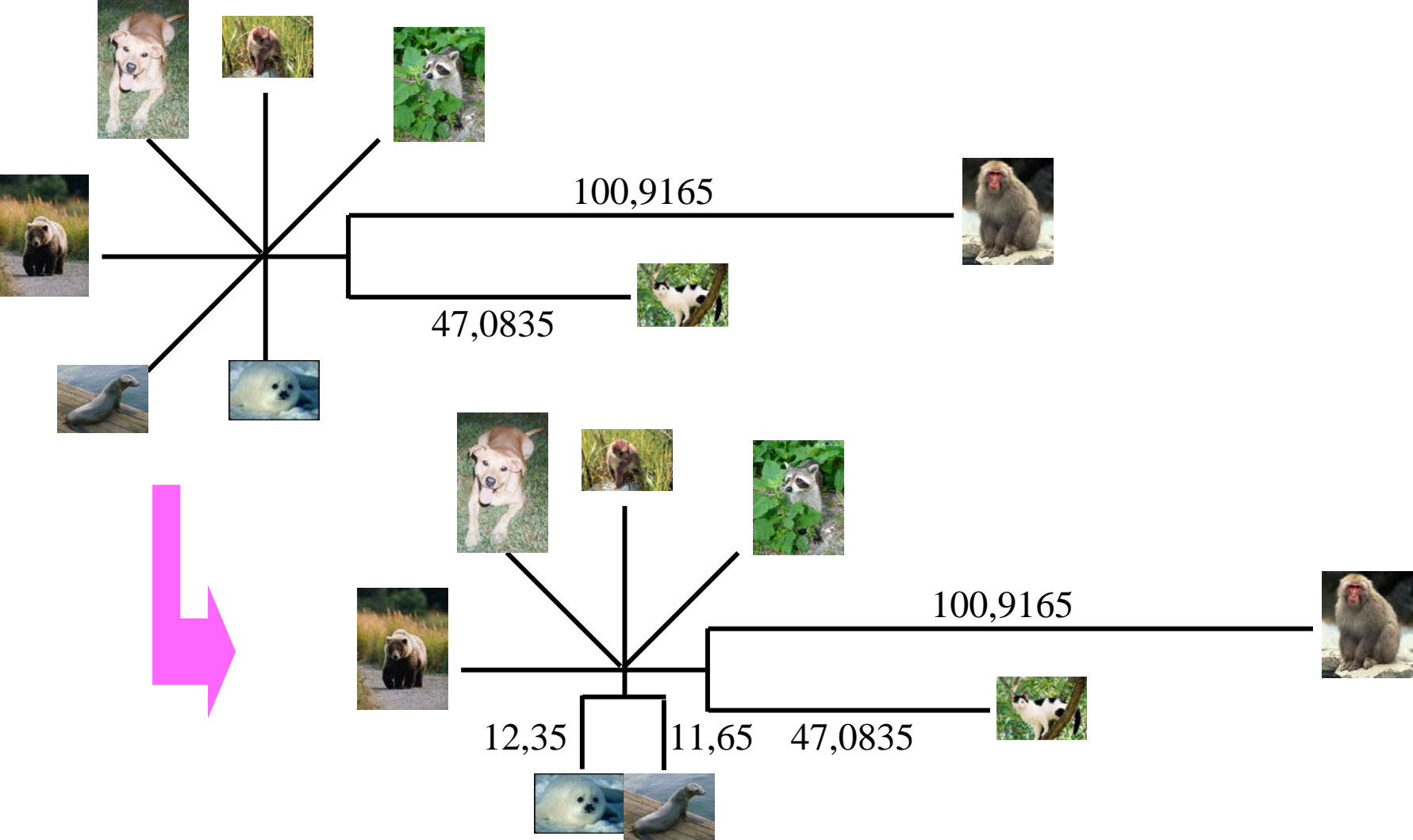
	Chien	Ours	Racoon	Belette	Phoque	Otarie	Chat Singe
Chien	0	-61,6	-58	-55,4	-52,1	-53,4	-57,9
Ours	32	0	-62,4	-53,8	-55,5	-50,8	-53,3
Racoon	48	26	0	-58,2	-52,9	-52,2	-53,7
Belette	51	34	42	0	-52,3	-57,6	-61,1
Phoque	50	29	44	44	0	-68,3	-56,3
Otarie	48	33	44	38	24	0	-55,1
Chat Singe	49	36	48	40	41,5	42	0
u_i	55,6	38	50,4	49,8	46,5	45,8	51,3

$D_{ij} = u_i - u_j$ exemple Ours/Chien : $32 - 55,6 - 38 = -61,6$

3. Joindre i et j \Leftrightarrow joindre phoque et otarie. Calculer la longueur de la branche i (phoque) au nouveau nœud v_i et j (otarie) au nouveau nœud v_j :

$$v_i = D_{ij}/2 + (u_i - u_j)/2 \Leftrightarrow D_{\text{phoque-otarie}}/2 + (46,5 - 45,8)/2 = 12,35$$

$$v_j = D_{ij}/2 + (u_j - u_i)/2 \Leftrightarrow D_{\text{phoque-otarie}}/2 + (45,8 - 46,5)/2 = 11,65$$



1. Pour chaque feuille calculer $u_i = \sum_{j:j \neq i}^n D_{ij} / (n-2)$
2. Choisir i et j pour lesquels $D_{ij} - u_i - u_j$ est la plus petite
3. Joindre i et j . Calculer la longueur de la branche i au nouveau nœud v_i et j au nouveau nœud v_j comme étant
$$v_i = D_{ij}/2 + (u_i - u_j)/2$$
$$v_j = D_{ij}/2 + (u_j - u_i)/2$$
4. Calculer la distance entre le nouveau nœud (ij) et chaque autre feuille comme
$$D_{(ij),k} = (D_{ik} + D_{jk} - D_{ij}) / 2$$
5. Éliminer les colonnes et les lignes correspondant aux groupes i et j et ajouter celles correspondant au nouveau groupe (ij)
6. Si il reste un seul élément dans la matrice connecter les deux derniers nœuds, sinon retourner en 1.



	Chien	Ours	Racoon	Belette	Phoque	Otarie	Chat	Singe
Chien	0							
Ours	32	0						
Racoon	48	26	0					
Belette	51	34	42	0				
Phoque	50	29	44	44	0			
Otarie	48	33	44	38	24	0		
Chat	98	84	92	86	89	90	0	
Singe	148	136	152	142	142	142	148	0
u_i	79,167	62,333	74,667	72,833	70,333	69,833	114,5	168,333

$$u_i = \sum_{j:j \neq i}^n D_{ij} / (n-2)$$

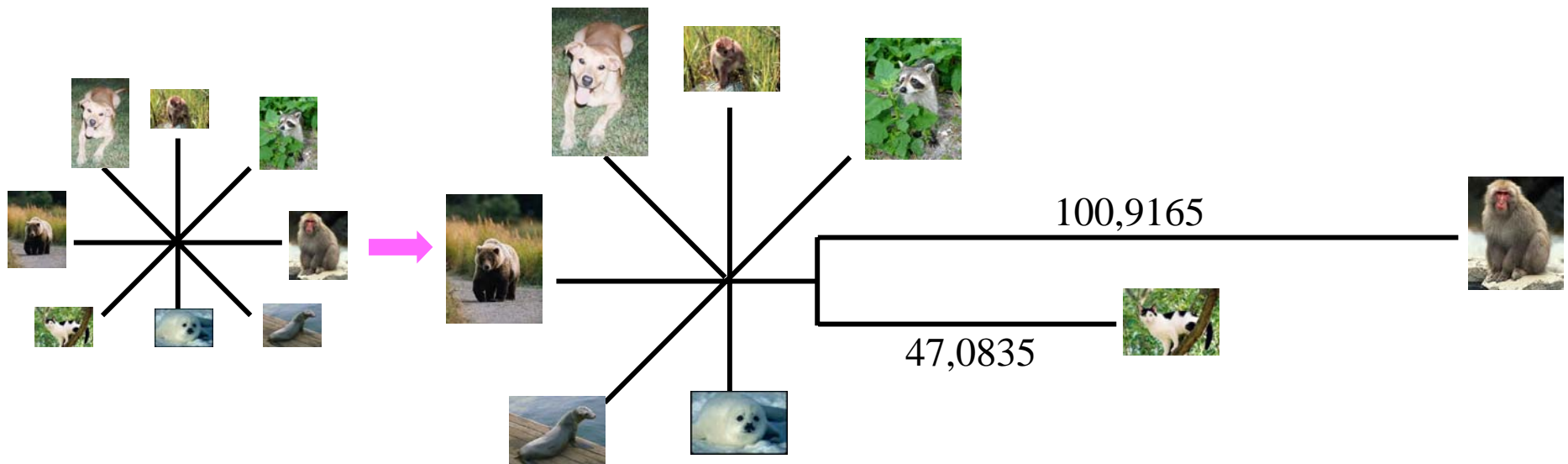
1. Pour chaque feuille calculer $u_i = \sum_{j:j \neq i}^n D_{ij} / (n-2)$
2. Choisir i et j pour lesquels $D_{ij} - u_i - u_j$ est la plus petite
3. Joindre i et j . Calculer la longueur de la branche i au nouveau nœud v_i et j au nouveau nœud v_j comme étant
$$v_i = D_{ij}/2 + (u_i - u_j)/2$$
$$v_j = D_{ij}/2 + (u_j - u_i)/2$$
4. Calculer la distance entre le nouveau nœud (ij) et chaque autre feuille comme
$$D_{(ij),k} = (D_{ik} + D_{jk} - D_{ij}) / 2$$
5. Éliminer les colonnes et les lignes correspondant aux groupes i et j et ajouter celles correspondant au nouveau groupe (ij)
6. Si il reste un seul élément dans la matrice connecter les deux derniers nœuds, sinon retourner en 1.



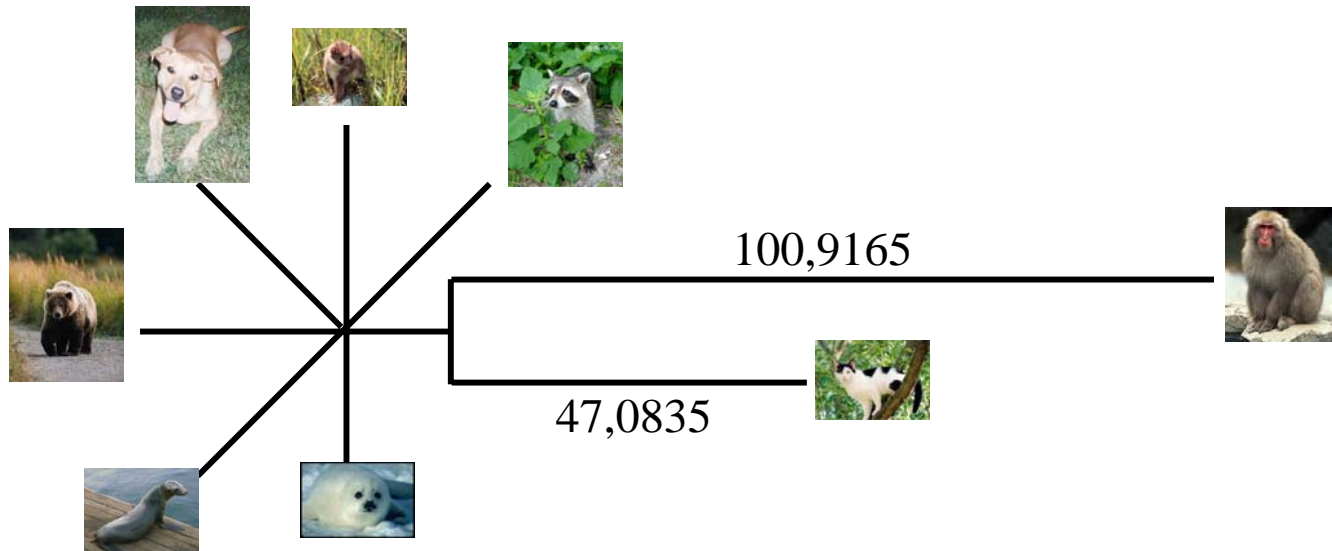
	Chien	Ours	Racoon	Belette	Phoque	Otarie	Chat	Singe
Chien	0	-109,5	-105,834	-101	-99,5	-101	-95.667	-99,5
Ours	32	0	-111	-101,166	-103,666	-99,166	-92,833	-94,666
Racoon	48	26	0	-105,5	-101	-100,5	-97,167	-91
Belette	51	34	42	0	-99,166	-104,666	-101,333	-99,166
Phoque	50	29	44	44	0	-116,166	-95.833	-96,666
Otarie	48	33	44	38	24	0	-94,333	-96,166
Chat	98	84	92	86	89	90	0	-134,833
Singe	148	136	152	142	142	142	148	0
u_i	79,167	62,333	74,667	72,833	70,333	69,833	114,5	168,333

$D_{ij} = u_i - u_j$, exemple Ours/Chien : $32 - 79,167 - 62,333 = -109,5$

1. Pour chaque feuille calculer $u_i = \sum_{j:j \neq i}^n D_{ij} / (n-2)$
2. Choisir i et j pour lesquels $D_{ij} - u_i - u_j$ est la plus petite
3. **Joindre i et $j \Leftrightarrow$ joindre chat et singe. Calculer la longueur de la branche i (chat) au nouveau nœud vi et j (singe) au nouveau nœud vj comme étant**
 $v_i = D_{ij}/2 + (u_i - u_j)/2 \Leftrightarrow D_{\text{chat-singe}}/2 + (114.5 - 168.333)/2 = 47.0835$
 $v_j = D_{ij}/2 + (u_j - u_i)/2 \Leftrightarrow D_{\text{singe-singe}}/2 + (168.333 - 114.5)/2 = 100,9165$
4. Calculer la distance entre le nouveau nœud (ij) et chaque autre feuille comme
 $D_{(ij),k} = (D_{ik} + D_{jk} - D_{ij}) / 2$
5. Éliminer les colonnes et les lignes correspondant aux groupes i et j et ajouter celles correspondant au nouveau groupe (ij)
6. Si il reste un seul élément dans la matrice connecter les deux derniers nœuds, sinon retourner en 1.



1. Pour chaque feuille calculer $u_i = \sum_{j:j \neq i}^n D_{ij} / (n-2)$
2. Choisir i et j pour lesquels $D_{ij} - u_i - u_j$ est la plus petite
3. Joindre i et j . Calculer la longueur de la branche i au nouveau nœud v_i et j au nouveau nœud v_j
4. Calculer la distance entre le nouveau nœud (ij) et chaque autre feuille comme $D_{(ij),k} = (D_{ik} + D_{jk} - D_{ij}) / 2$
5. Éliminer les colonnes et les lignes correspondant aux groupes i et j et ajouter celles correspondant au nouveau groupe (ij)
6. Si il reste un seul élément dans la matrice connecter les deux derniers nœuds, sinon retourner en 1.

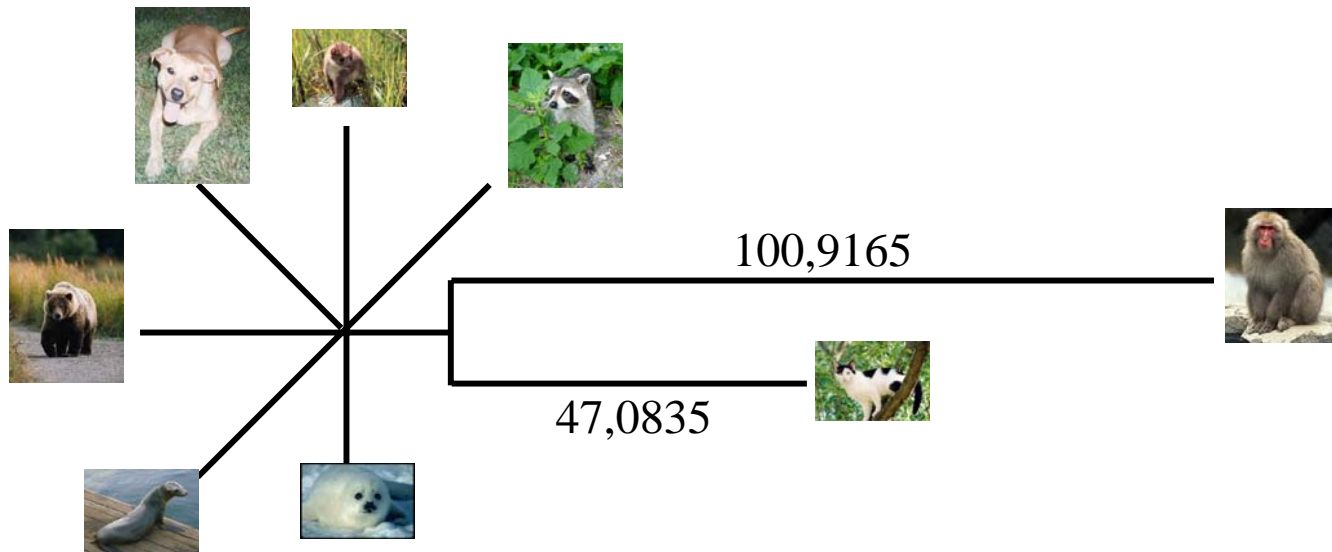




	Chien	Ours	Racoon	Belette	Phoque	Otarie	Chat	Singe
Chien	0							
Ours	32	0						
Racoon	48	26	0					
Belette	51	34	42	0				
Phoque	50	29	44	44	0			
Otarie	48	33	44	38	24	0		
Chat	$(98+148-148)/2 = 49$	$(84+136-148)/2 = 36$	$(92+152-148)/2 = 48$	$(86+142-148)/2 = 40$	$(89+142-148)/2 = 41,5$	$(90+142-148)/2 = 42$		
Singe	98	84	92	86	89	90	0	
Chat	148	136	152	142	142	142	148	0
Singe								

$$D_{(ii)k} = (D_{ik} + D_{ik} - D_{ii}) / 2$$

1. Pour chaque feuille calculer $u_i = \sum_{j:j \neq i}^n D_{ij} / (n-2)$
2. Choisir i et j pour lesquels $D_{ij} - u_i - u_j$ est la plus petite
3. Joindre i et j . Calculer la longueur de la branche i au nouveau nœud v_i et j au nouveau nœud v_j
4. Calculer la distance entre le nouveau nœud (ij) et chaque autre feuille comme $D_{(ij),k} = (D_{ik} + D_{jk} - D_{ij}) / 2$
5. **Éliminer les colonnes et les lignes correspondant aux groupes i et j et ajouter celles correspondant au nouveau groupe (ij)**
6. Si il reste un seul élément dans la matrice connecter les deux derniers nœuds, sinon retourner en 1.





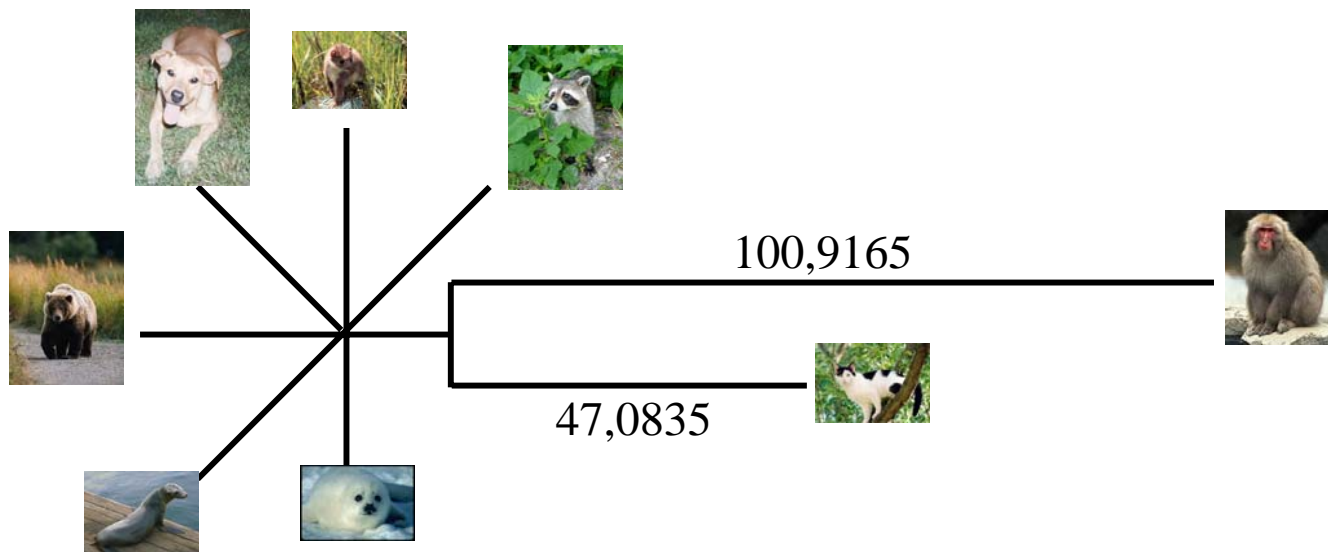
	Chien	Ours	Racoon	Belette	Phoque	Otarie	Chat	Singe
Chien	0							
Ours	32	0						
Racoon	48	26	0					
Belette	51	34	42	0				
Phoque	50	29	44	44	0			
Otarie	48	33	44	38	24	0		
Chat	49	36	48	40	41,5	42		
Singe								
Chat	98	84	92	86	89	90	0	
Singe	148	136	152	142	142	142	148	0

Supprimer les colonnes du chat et du singe

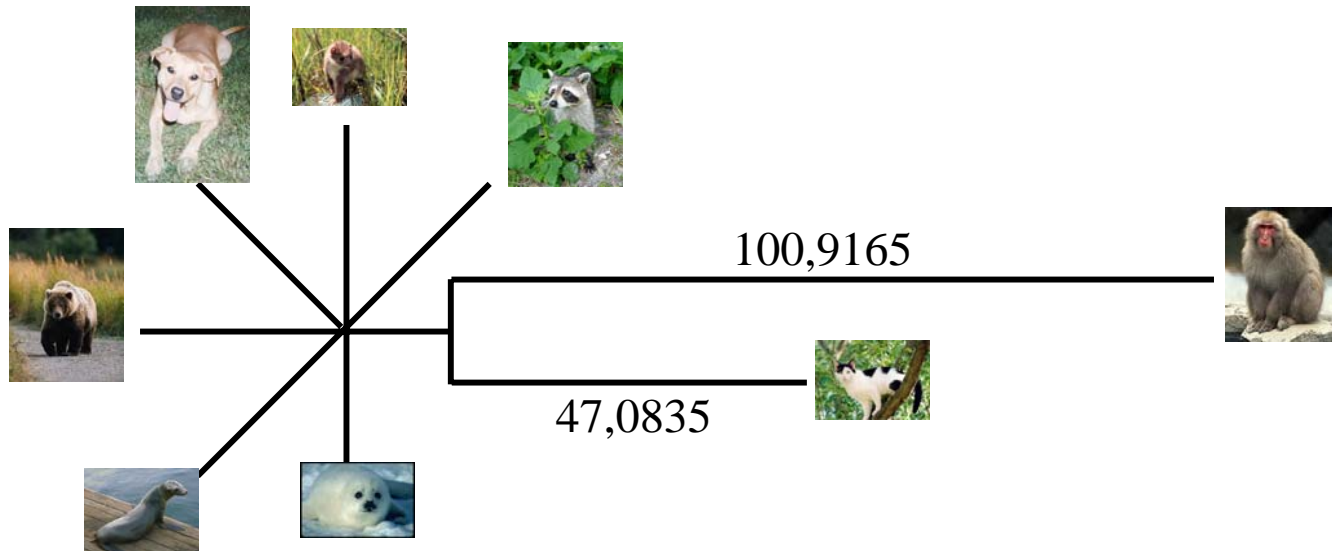


	Chien	Ours	Racoon	Belette	Phoque	Otarie	Chat Singe
Chien	0						
Ours	32	0					
Racoon	48	26	0				
Belette	51	34	42	0			
Phoque	50	29	44	44	0		
Otarie	48	33	44	38	24	0	
Chat Singe	49	36	48	40	41,5	42	0

1. Pour chaque feuille calculer $u_i = \sum_{j:j \neq i} D_{ij} / (n-2)$
2. Choisir i et j pour lesquels $D_{ij} - u_i - u_j$ est la plus petite
3. Joindre i et j . Calculer la longueur de la branche i au nouveau nœud v_i et j au nouveau nœud v_j
4. Calculer la distance entre le nouveau nœud (ij) et chaque autre feuille comme $D_{(ij),k} = (D_{ik} + D_{jk} - D_{ij}) / 2$
5. Éliminer les colonnes et les lignes correspondant aux groupes i et j et ajouter celles correspondant au nouveau groupe (ij)
6. Si il reste un seul élément dans la matrice connecter les deux derniers nœuds, sinon retourner en 1.



1. Pour chaque feuille calculer $u_i = \sum_{j:j \neq i}^n D_{ij} / (n-2)$
2. Choisir i et j pour lesquels $D_{ij} - u_i - u_j$ est la plus petite
3. Joindre i et j . Calculer la longueur de la branche i au nouveau nœud v_i et j au nouveau nœud v_j
4. Calculer la distance entre le nouveau nœud (ij) et chaque autre feuille comme $D_{(ij),k} = (D_{ik} + D_{jk} - D_{ij}) / 2$
5. Éliminer les colonnes et les lignes correspondant aux groupes i et j et ajouter celles correspondant au nouveau groupe (ij)
6. Si il reste un seul élément dans la matrice connecter les deux derniers nœuds, sinon retourner en 1.

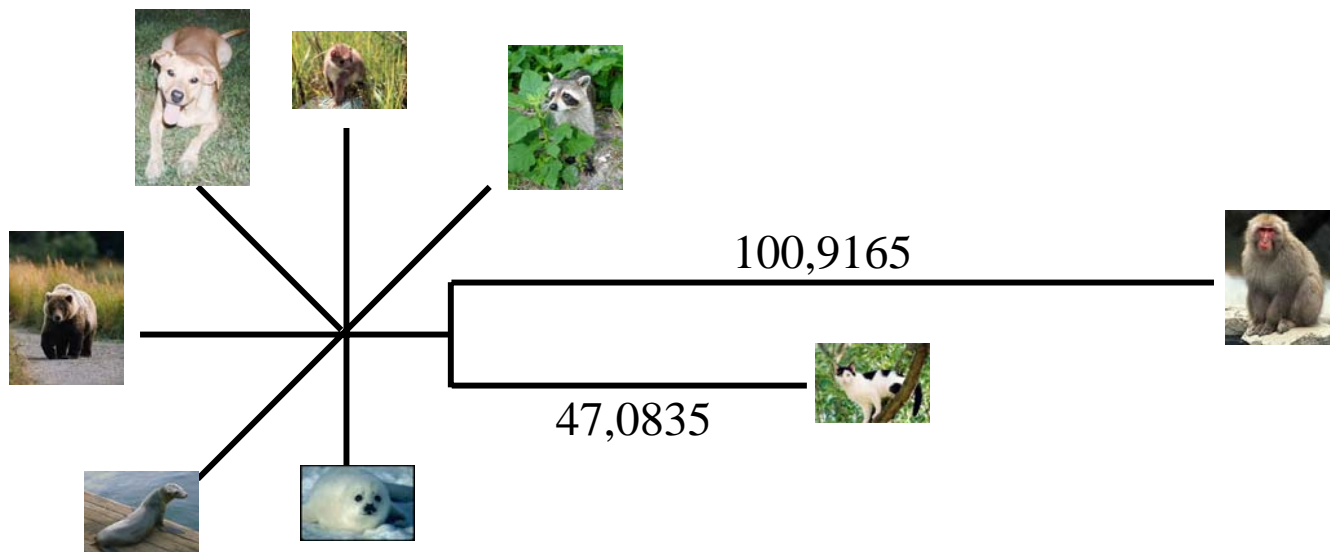




	Chien	Ours	Racoon	Belette	Phoque	Otarie	Chat Singe
Chien	0						
Ours	32	0					
Racoon	48	26	0				
Belette	51	34	42	0			
Phoque	50	29	44	44	0		
Otarie	48	33	44	38	24	0	
Chat Singe	49	36	48	40	41,5	42	0
u_i	55,6	38	50,4	49,8	46,5	45,8	51,3

$$u_i = \sum_{j:j \neq i}^n D_{ij} / (n-2)$$

1. Pour chaque feuille calculer $u_i = \sum_{j:j \neq i}^n D_{ij} / (n-2)$
2. Choisir i et j pour lesquels $D_{ij} - u_i - u_j$ est la plus petite
3. Joindre i et j . Calculer la longueur de la branche i au nouveau nœud v_i et j au nouveau nœud v_j
4. Calculer la distance entre le nouveau nœud (ij) et chaque autre feuille comme $D_{(ij),k} = (D_{ik} + D_{jk} - D_{ij}) / 2$
5. Éliminer les colonnes et les lignes correspondant aux groupes i et j et ajouter celles correspondant au nouveau groupe (ij)
6. Si il reste un seul élément dans la matrice connecter les deux derniers nœuds, sinon retourner en 1.





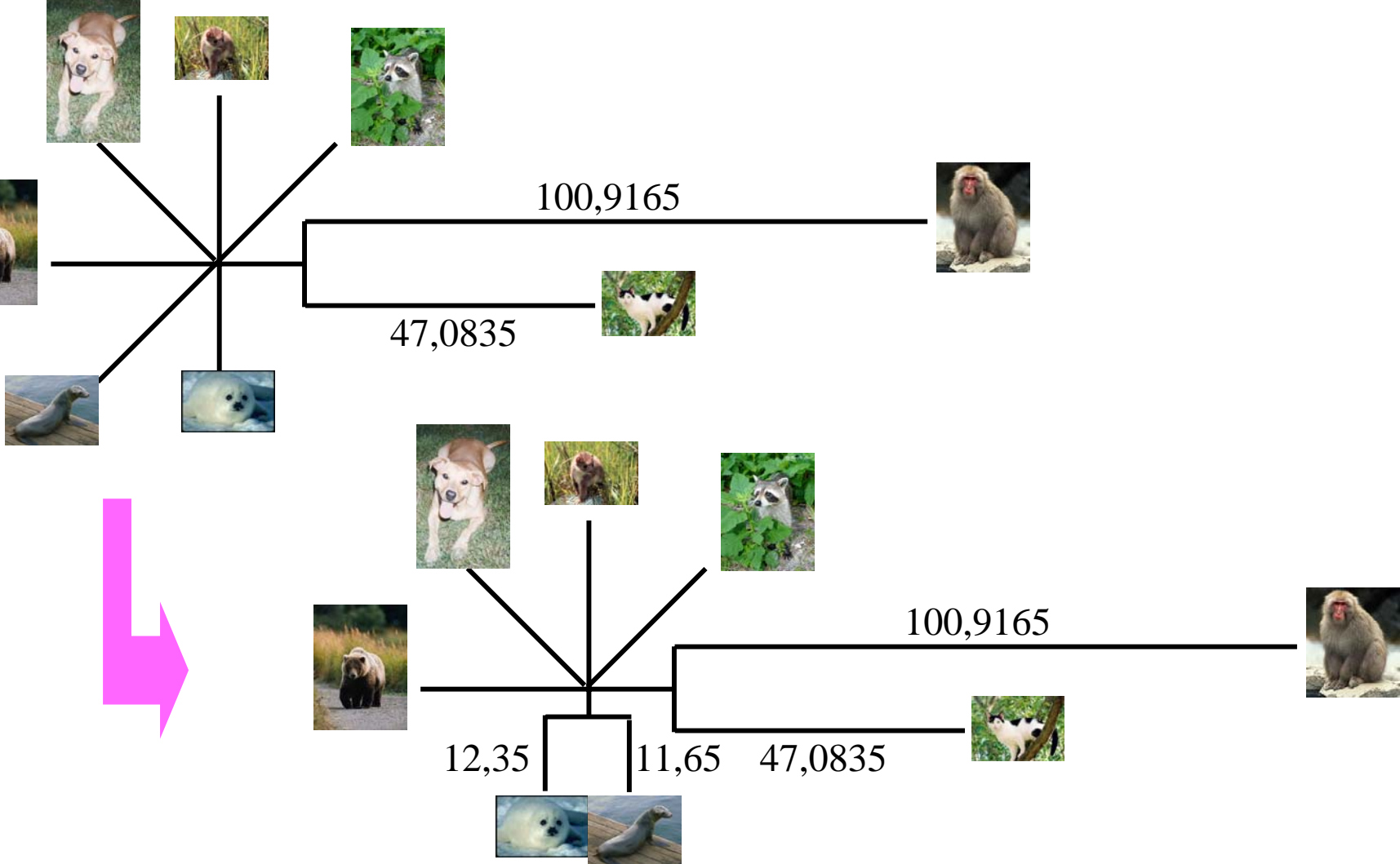
	Chien	Ours	Racoon	Belette	Phoque	Otarie	Chat Singe
Chien	0	-61,6	-58	-55,4	-52,1	-53,4	-57,9
Ours	32	0	-62,4	-53,8	-55,5	-50,8	-53,3
Racoon	48	26	0	-58,2	-52,9	-52,2	-53,7
Belette	51	34	42	0	-52,3	-57,6	-61,1
Phoque	50	29	44	44	0	-68,3	-56,3
Otarie	48	33	44	38	24	0	-55,1
Chat Singe	49	36	48	40	41,5	42	0
u_i	55,6	38	50,4	49,8	46,5	45,8	51,3

$D_{ij} = u_i - u_j$ exemple Ours/Chien : $32 - 55,6 - 38 = -61,6$

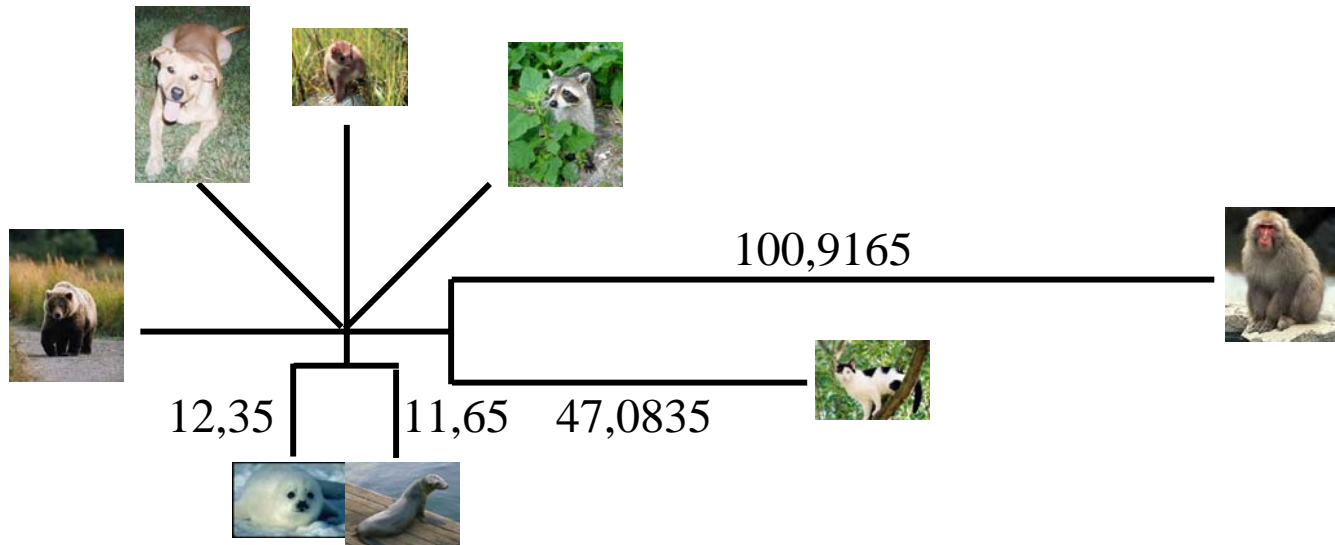
3. Joindre i et j \Leftrightarrow joindre phoque et otarie. Calculer la longueur de la branche i (phoque) au nouveau nœud v_i et j (otarie) au nouveau nœud v_j :

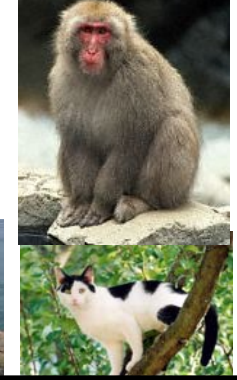
$$v_i = D_{ij}/2 + (u_i - u_j)/2 \Leftrightarrow D_{\text{phoque-otarie}}/2 + (46,5 - 45,8)/2 = 12,35$$

$$v_j = D_{ij}/2 + (u_j - u_i)/2 \Leftrightarrow D_{\text{phoque-otarie}}/2 + (45,8 - 46,5)/2 = 11,65$$



1. Pour chaque feuille calculer $u_i = \sum_{j:j \neq i}^n D_{ij} / (n-2)$
2. Choisir i et j pour lesquels $D_{ij} - u_i - u_j$ est la plus petite
3. Joindre i et j . Calculer la longueur de la branche i au nouveau nœud v_i et j au nouveau nœud v_j
4. Calculer la distance entre le nouveau nœud (ij) et chaque autre feuille comme $D_{(ij),k} = (D_{ik} + D_{jk} - D_{ij}) / 2$
5. Éliminer les colonnes et les lignes correspondant aux groupes i et j et ajouter celles correspondant au nouveau groupe (ij)
6. Si il reste un seul élément dans la matrice connecter les deux derniers nœuds, sinon retourner en 1.

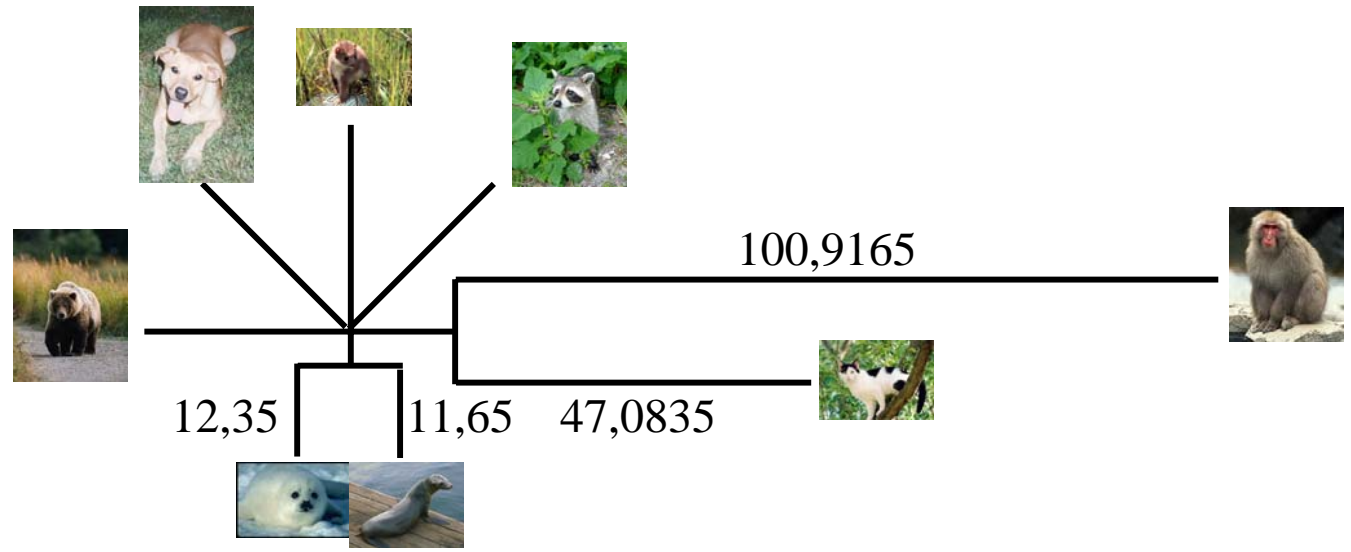


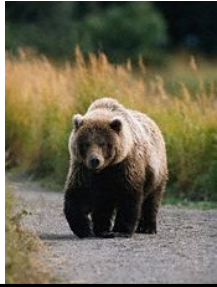


	Chien	Ours	Racoon	Belette	Phoque	Otarie	Chat Singe
Chien	0						
Ours	32	0					
Racoon	48	26	0				
Belette	51	34	42	0			
Phoque	50	29	44	44	0		
Otarie	48	33	44	38	24	0	
Phoque Otarie	$(50+48-24)/2=37$	$(29+33-24)/2=19$	$(44+44-24)/2=32$	$(44+38-24)/2=29$			$(41,5+42-24)/2=29,75$
Chat Singe	49	36	48	40	41,5	42	0

$$D_{(ii)k} = (D_{ik} + D_{ik} - D_{ii}) / 2$$

1. Pour chaque feuille calculer $u_i = \sum_{j:j \neq i}^n D_{ij} / (n-2)$
2. Choisir i et j pour lesquels $D_{ij} - u_i - u_j$ est la plus petite
3. Joindre i et j . Calculer la longueur de la branche i au nouveau nœud v_i et j au nouveau nœud v_j
4. Calculer la distance entre le nouveau nœud (ij) et chaque autre feuille comme $D_{(ij),k} = (D_{ik} + D_{jk} - D_{ij}) / 2$
5. **Éliminer les colonnes et les lignes correspondant aux groupes i et j et ajouter celles correspondant au nouveau groupe (ij)**
6. Si il reste un seul élément dans la matrice connecter les deux derniers nœuds, sinon retourner en 1.



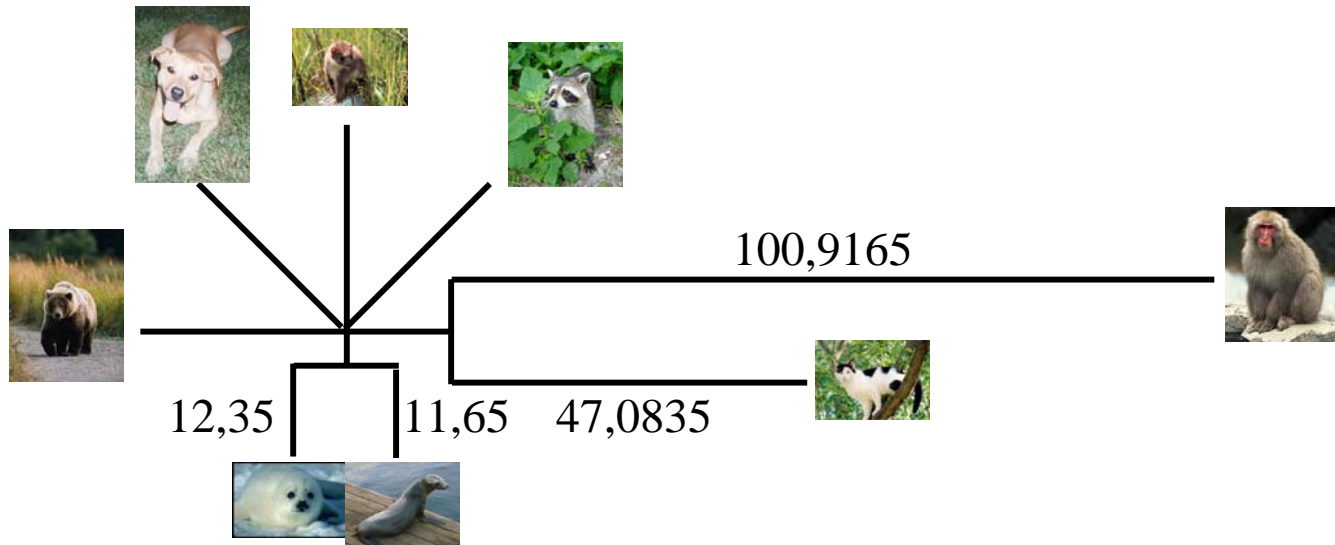


	Chien	Ours	Racoon	Belette	Phoque	Otarie	Chat Singe
Chien	0						
Ours	32	0					
Racoon	48	26	0				
Belette	51	34	42	0			
Phoque	50	29	44	44	0		
Otarie	48	33	44	38	24	0	
Phoque Otarie	37	19	32	29			29,75
Chat Singe	49	36	48	40	41,5	42	0

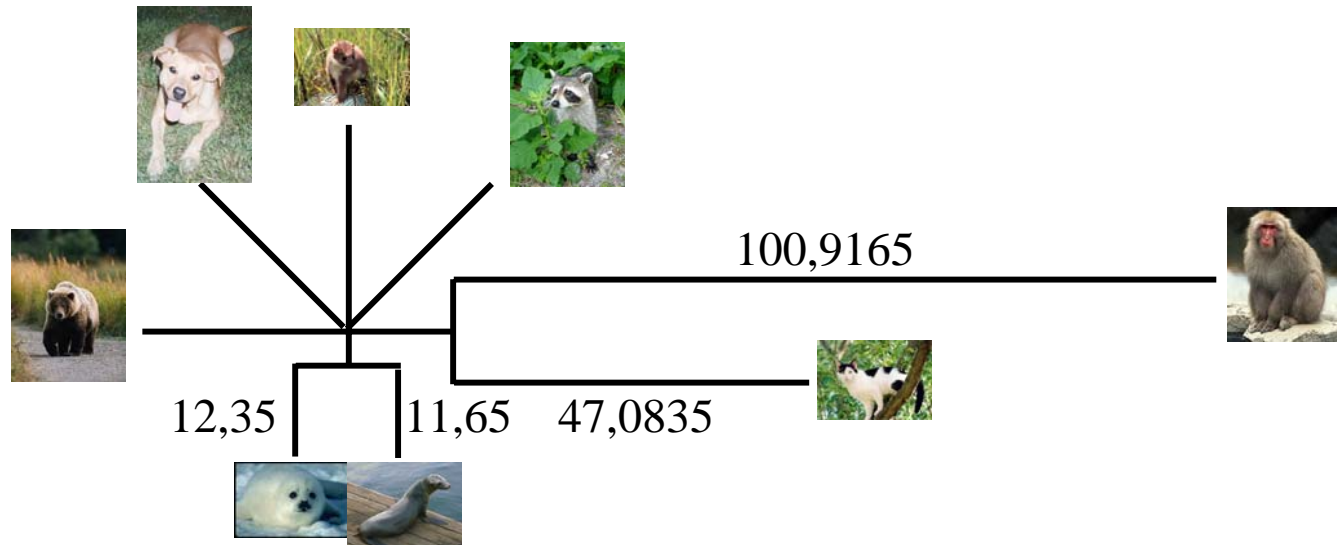


	Chien	Ours	Racoon	Belette	Phoque Otarie	Chat Singe
Chien	0					
Ours	32	0				
Racoon	48	26	0			
Belette	51	34	42	0		
Phoque Otarie	37	19	32	29	0	
Chat Singe	49	36	48	40	29,75	0

1. Pour chaque feuille calculer $u_i = \sum_{j:j \neq i}^n D_{ij} / (n-2)$
2. Choisir i et j pour lesquels $D_{ij} - u_i - u_j$ est la plus petite
3. Joindre i et j . Calculer la longueur de la branche i au nouveau nœud v_i et j au nouveau nœud v_j
4. Calculer la distance entre le nouveau nœud (ij) et chaque autre feuille comme $D_{(ij),k} = (D_{ik} + D_{jk} - D_{ij}) / 2$
5. Éliminer les colonnes et les lignes correspondant aux groupes i et j et ajouter celles correspondant au nouveau groupe (ij)
6. Si il reste un seul élément dans la matrice connecter les deux derniers nœuds, sinon retourner en 1.



1. Pour chaque feuille calculer $u_i = \sum_{j:j \neq i}^n D_{ij} / (n-2)$
2. Choisir i et j pour lesquels $D_{ij} - u_i - u_j$ est la plus petite
3. Joindre i et j . Calculer la longueur de la branche i au nouveau nœud v_i et j au nouveau nœud v_j
4. Calculer la distance entre le nouveau nœud (ij) et chaque autre feuille comme $D_{(ij),k} = (D_{ik} + D_{jk} - D_{ij}) / 2$
5. Éliminer les colonnes et les lignes correspondant aux groupes i et j et ajouter celles correspondant au nouveau groupe (ij)
6. Si il reste un seul élément dans la matrice connecter les deux derniers nœuds, sinon retourner en 1.

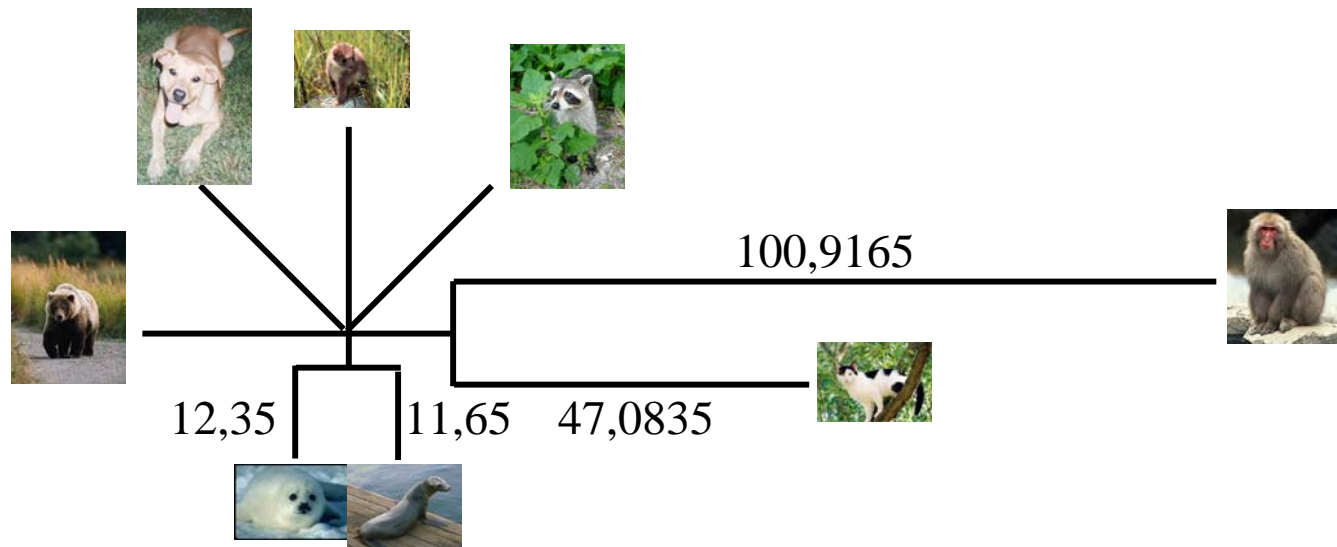


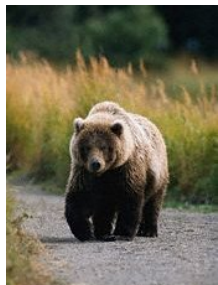


	Chien	Ours	Racoon	Belette	Phoque Otarie	Chat Singe
Chien	0					
Ours	32	0				
Racoon	48	26	0			
Belette	51	34	42	0		
Phoque Otarie	37	19	32	29	0	
Chat Singe	49	36	48	40	29,75	0
u_i	54,25	36,75	49	49	36,6875	50,6875

$$u_i = \sum_{j:j \neq i}^n D_{ij} / (n-2)$$

1. Pour chaque feuille calculer $u_i = \sum_{j:j \neq i}^n D_{ij} / (n-2)$
2. Choisir i et j pour lesquels $D_{ij} - u_i - u_j$ est la plus petite
3. Joindre i et j . Calculer la longueur de la branche i au nouveau nœud v_i et j au nouveau nœud v_j
4. Calculer la distance entre le nouveau nœud (ij) et chaque autre feuille comme $D_{(ij),k} = (D_{ik} + D_{jk} - D_{ij}) / 2$
5. Éliminer les colonnes et les lignes correspondant aux groupes i et j et ajouter celles correspondant au nouveau groupe (ij)
6. Si il reste un seul élément dans la matrice connecter les deux derniers nœuds, sinon retourner en 1.





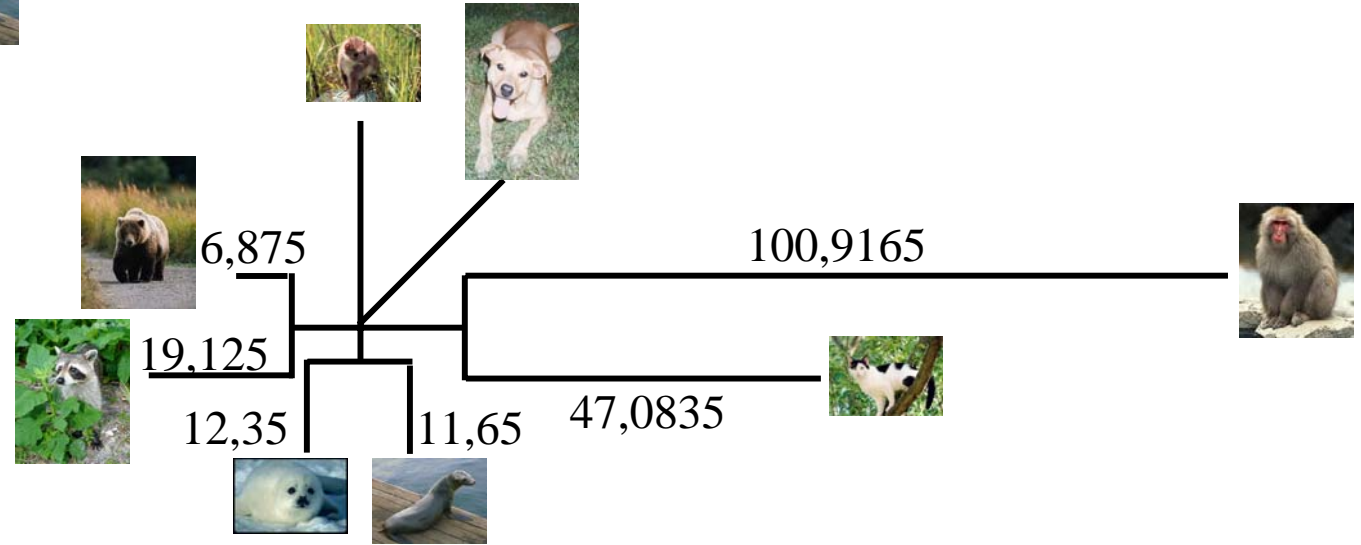
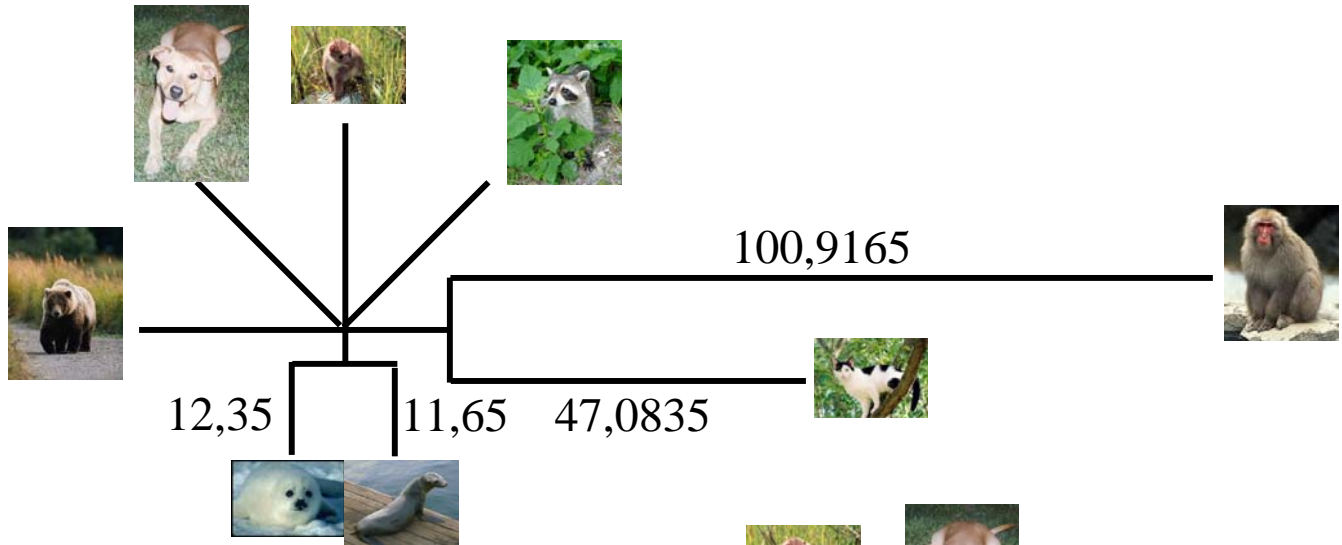
	Chien	Ours	Racoon	Belette	Phoque Otarie	Chat Singe
Chien	0	-59	-55,25	-52,25	-53,9375	-55.9375
Ours	32	0	-59,75	-51,75	-54,4375	-51.4375
Racoon	48	26	0	-56	-53,6875	-51,6875
Belette	51	34	42	0	-56,6875	-59,6875
Phoque Otarie	37	19	32	29	0	-57,625
Chat Singe	49	36	48	40	29,75	0
u_i	54,25	36,75	49	49	36,6875	50,6875

$D_{ij} = u_i - u_j$ exemple Ours/Chien : $32 - 54,25 - 36,75 = -59$

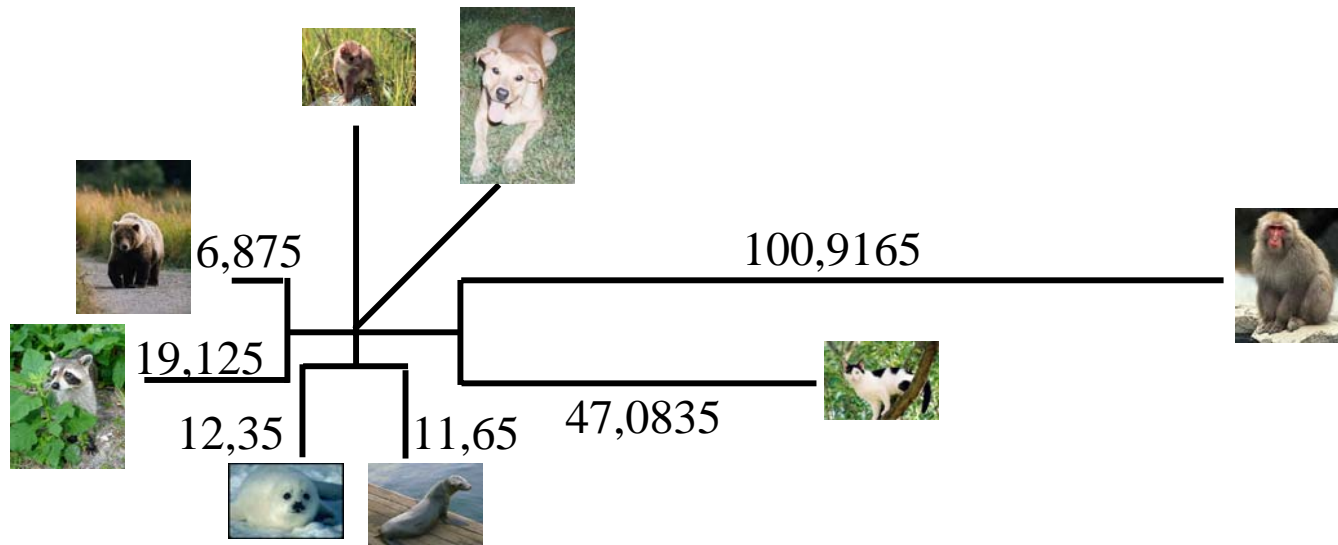
3. Joindre i et j ⇔ Joindre l'ours et le racoon. Calculer la longueur de la branche i (ours) au nouveau nœud vi et j (racoon) au nouveau nœud vj

$$v_i = D_{ij}/2 + (u_i - u_j)/2 \Leftrightarrow D_{\text{ours-racoon}}/2 + (36,75 - 49)/2 = 6,875$$

$$v_j = D_{ij}/2 + (u_j - u_i)/2 \Leftrightarrow D_{\text{ours-racoon}}/2 + (49 - 36,75)/2 = 19,125$$



1. Pour chaque feuille calculer $u_i = \sum_{j:j \neq i} D_{ij} / (n-2)$
2. Choisir i et j pour lesquels $D_{ij} - u_i - u_j$ est la plus petite
3. Joindre i et j . Calculer la longueur de la branche i au nouveau nœud v_i et j au nouveau nœud v_j
4. Calculer la distance entre le nouveau nœud (ij) et chaque autre feuille comme $D_{(ij),k} = (D_{ik} + D_{jk} - D_{ij}) / 2$
5. Éliminer les colonnes et les lignes correspondant aux groupes i et j et ajouter celles correspondant au nouveau groupe (ij)
6. Si il reste un seul élément dans la matrice connecter les deux derniers nœuds, sinon retourner en 1.

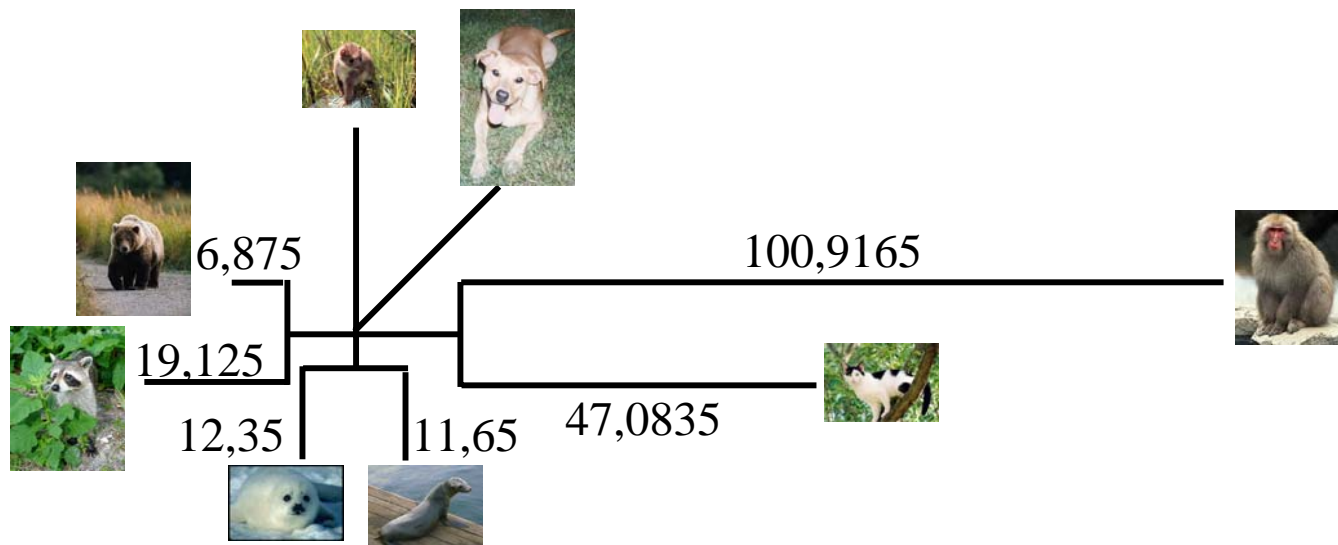




	Chien	Ours	Racoon	Belette	Phoque Otarie	Chat Singe
Chien	0					
Ours	32	0				
Racoon	48	26	0			
Ours Racoon	$(32+48-26)/2=27$			$(34+42-26)/2=25$	$(19+32-26)/2=12,5$	$(36+48-26)/2=29$
Belette	51	34	42	0		
Phoque Otarie	37	19	32	29	0	
Chat Singe	49	36	48	40	29,75	0

$$D_{(ii).k} = (D_{ik} + D_{jk} - D_{ij}) / 2$$

1. Pour chaque feuille calculer $u_i = \sum_{j:j \neq i} D_{ij} / (n-2)$
2. Choisir i et j pour lesquels $D_{ij} - u_i - u_j$ est la plus petite
3. Joindre i et j . Calculer la longueur de la branche i au nouveau nœud v_i et j au nouveau nœud v_j
4. Calculer la distance entre le nouveau nœud (ij) et chaque autre feuille comme $D_{(ij),k} = (D_{ik} + D_{jk} - D_{ij}) / 2$
5. **Éliminer les colonnes et les lignes correspondant aux groupes i (ours) et j (raccoon) et ajouter celles correspondant au nouveau groupe (ij)**
6. Si il reste un seul élément dans la matrice connecter les deux derniers nœuds, sinon retourner en 1.



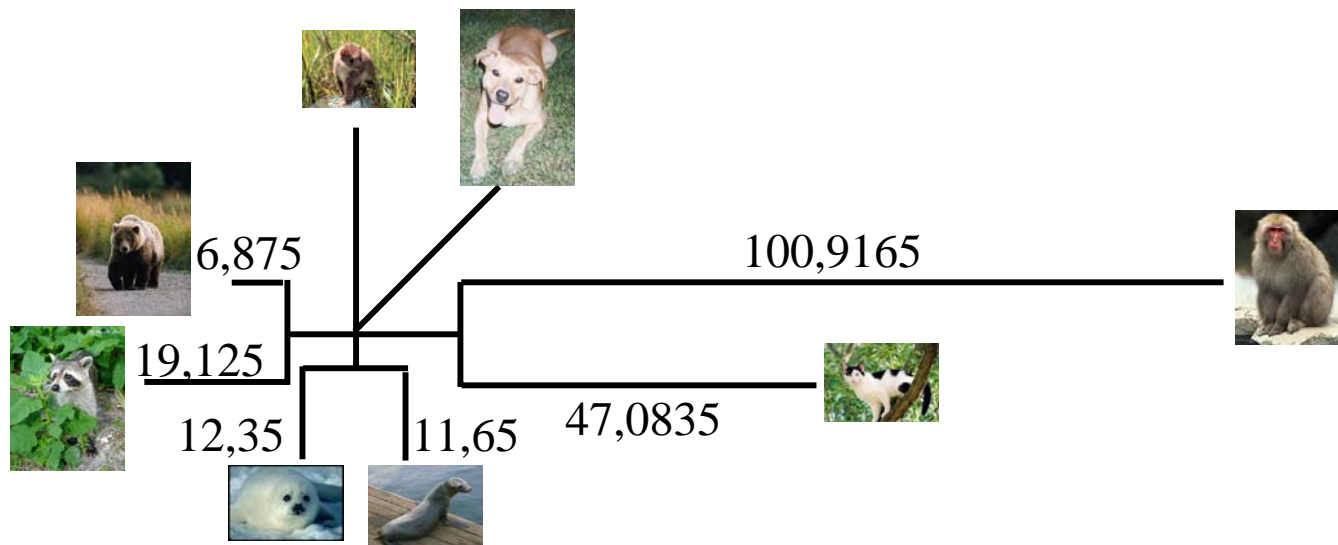


	Chien	Ours	Racoon	Belette	Phoque Otarie	Chat Singe
Chien	0					
Ours	32	0				
Racoon	48	26	0			
Ours Racoon	27			25	12,5	29
Belette	51	34	42	0		
Phoque Otarie	37	19	32	29	0	
Chat Singe	49	36	48	40	29,75	0

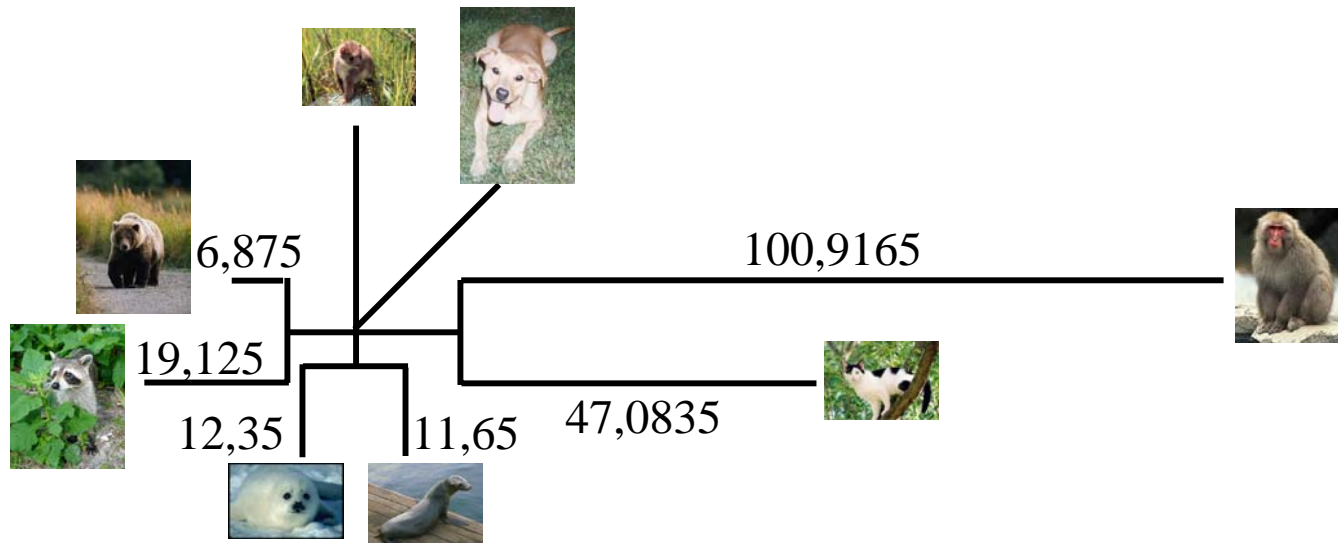


	Chien	Ours Racoon	Belette	Phoque Otarie	Chat Singe
Chien	0				
Ours Racoon	27	0			
Belette	51	25	0		
Phoque Otarie	37	12,5	29	0	
Chat Singe	49	29	40	29,75	0

1. Pour chaque feuille calculer $u_i = \sum_{j:j \neq i} D_{ij} / (n-2)$
2. Choisir i et j pour lesquels $D_{ij} - u_i - u_j$ est la plus petite
3. Joindre i et j . Calculer la longueur de la branche i au nouveau nœud v_i et j au nouveau nœud v_j
4. Calculer la distance entre le nouveau nœud (ij) et chaque autre feuille comme $D_{(ij),k} = (D_{ik} + D_{jk} - D_{ij}) / 2$
5. Éliminer les colonnes et les lignes correspondant aux groupes i (ours) et j (racoon) et ajouter celles correspondant au nouveau groupe (ij)
6. Si il reste un seul élément dans la matrice connecter les deux derniers nœuds, sinon retourner en 1.



1. Pour chaque feuille calculer $u_i = \sum_{j:j \neq i}^n D_{ij} / (n-2)$
2. Choisir i et j pour lesquels $D_{ij} - u_i - u_j$ est la plus petite
3. Joindre i et j . Calculer la longueur de la branche i au nouveau nœud v_i et j au nouveau nœud v_j
4. Calculer la distance entre le nouveau nœud (ij) et chaque autre feuille comme $D_{(ij),k} = (D_{ik} + D_{jk} - D_{ij}) / 2$
5. Éliminer les colonnes et les lignes correspondant aux groupes i (ours) et j (racoons) et ajouter celles correspondant au nouveau groupe (ij)
6. Si il reste un seul élément dans la matrice connecter les deux derniers nœuds, sinon retourner en 1.

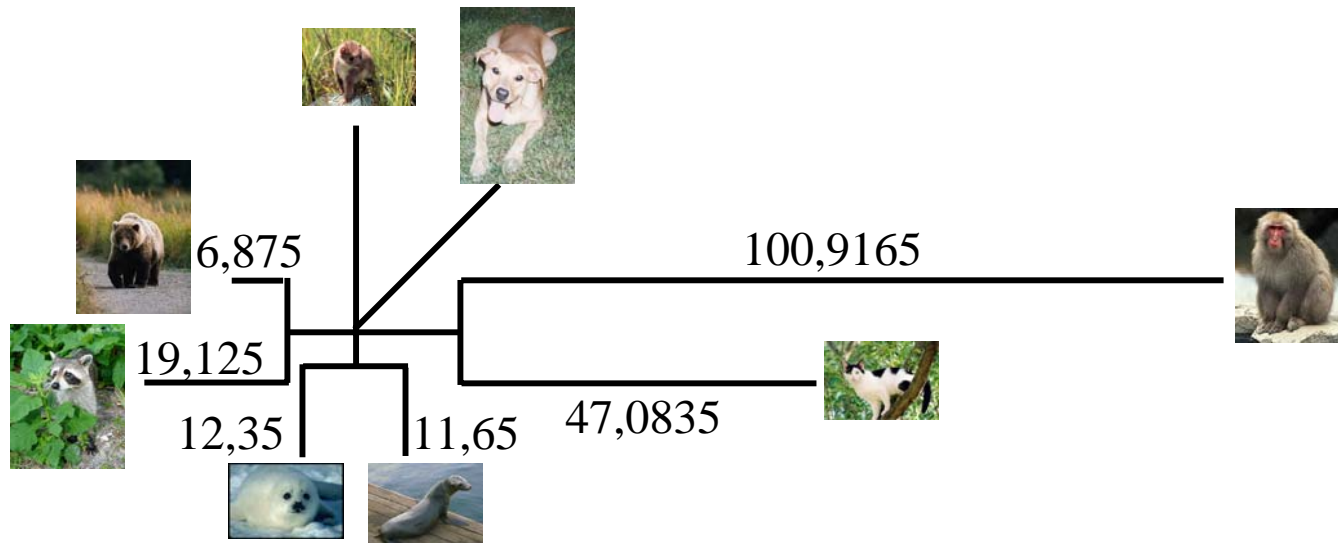




	Chien	Ours Racoon	Belette	Phoque Otarie	Chat Singe
Chien	0				
Ours Racoon	27	0			
Belette	51	25	0		
Phoque Otarie	37	12,5	29	0	
Chat Singe	49	29	40	29,75	0
u_i	54,667	31,167	48,333	36,083	49,25

$$u_i = \sum_{j: i \neq j}^n D_{ij} / (n-2)$$

1. Pour chaque feuille calculer $u_i = \sum_{j:j \neq i} D_{ij} / (n-2)$
2. Choisir i et j pour lesquels $D_{ij} - u_i - u_j$ est la plus petite
3. Joindre i et j . Calculer la longueur de la branche i au nouveau nœud v_i et j au nouveau nœud v_j
4. Calculer la distance entre le nouveau nœud (ij) et chaque autre feuille comme $D_{(ij),k} = (D_{ik} + D_{jk} - D_{ij}) / 2$
5. Éliminer les colonnes et les lignes correspondant aux groupes i (ours) et j (racoon) et ajouter celles correspondant au nouveau groupe (ij)
6. Si il reste un seul élément dans la matrice connecter les deux derniers nœuds, sinon retourner en 1.





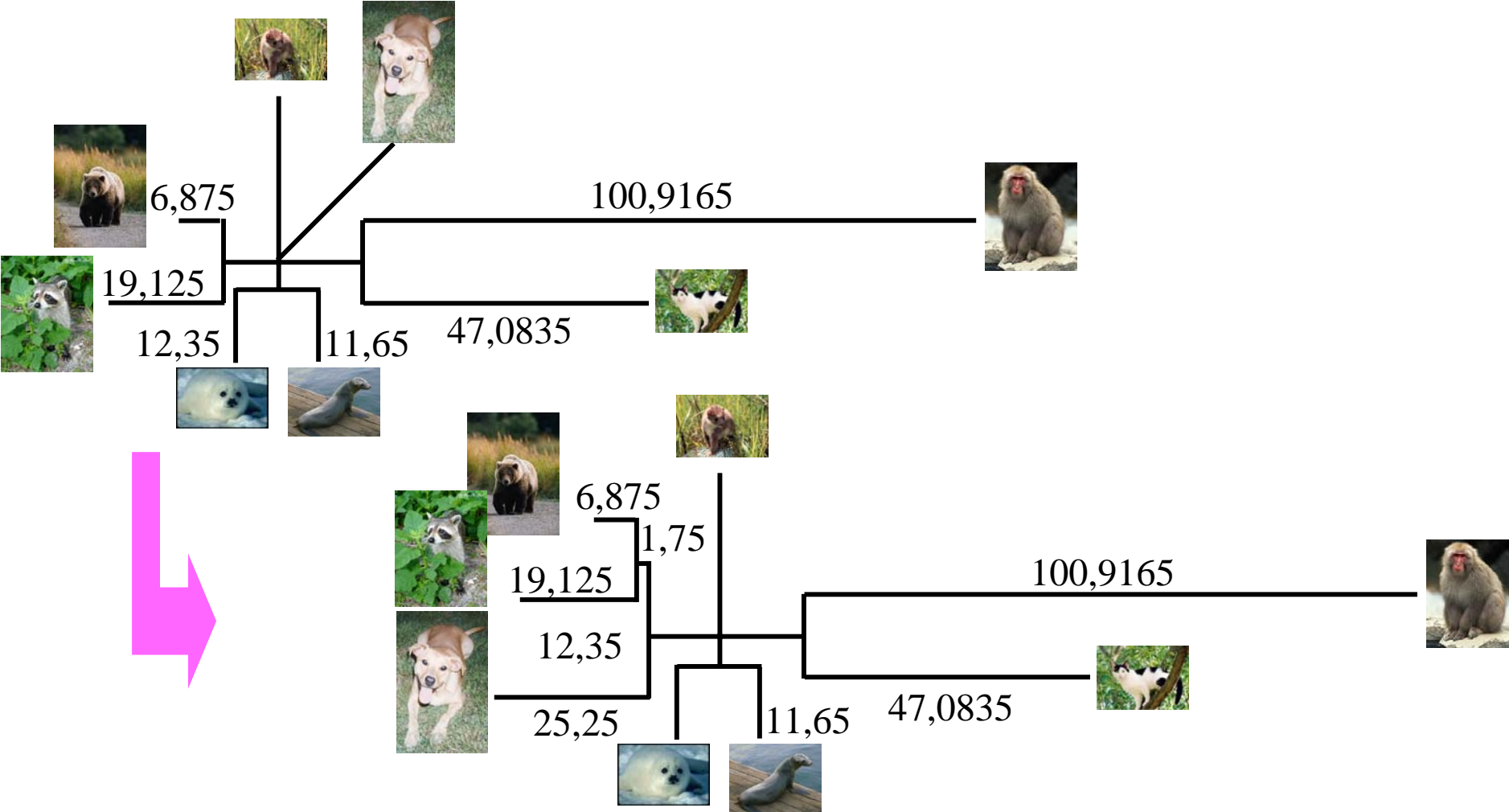
	Chien	Ours Racoon	Belette	Phoque Otarie	Chat Singe
Chien	0	-58,834	-52	-53,75	-54,917
Ours Racoon	27	0	-54,5	-54,75	-51,417
Belette	51	25	0	-55,416	-57,583
Phoque Otarie	37	12,5	29	0	-55,583
Chat Singe	49	29	40	29,75	0
u_i	54,667	31,167	48,333	36,083	49,25

$D_{ij} - u_i - u_j$ exemple Racoon/Ours/Chien : $27 - 54,667 - 31,167 = -58,834$

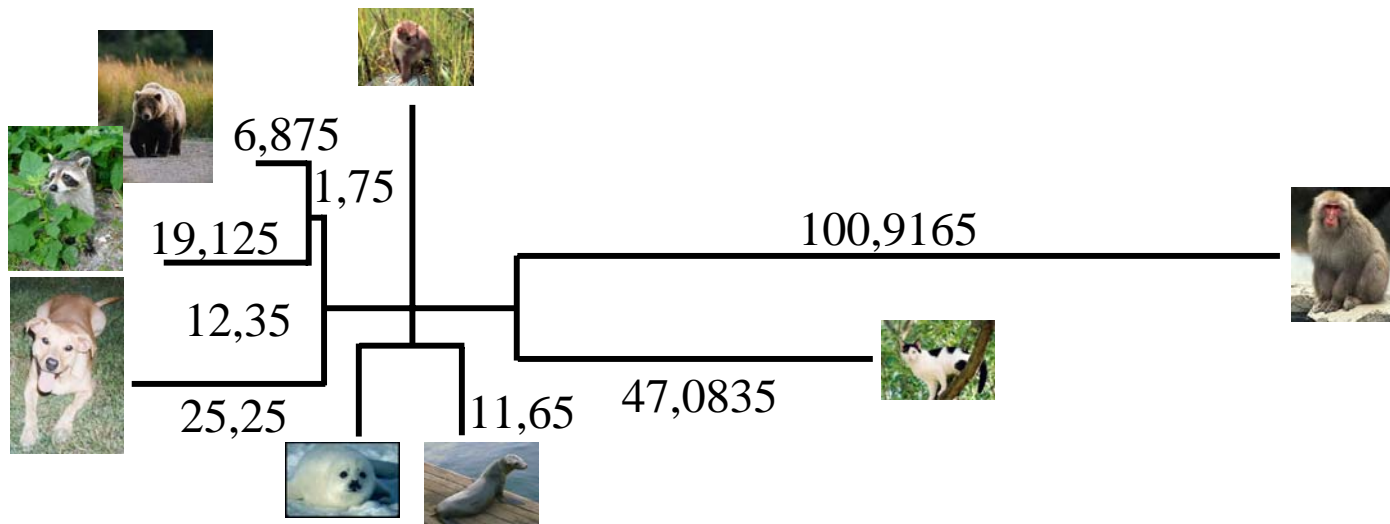
3. Joindre i et j ⇔ Joindre l'ours/racoon et le chien. Calculer la longueur de la branche i (chien) au nouveau nœud vi et j (ours/racoon) au nouveau nœud vj

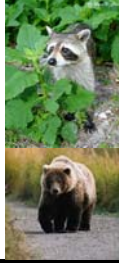
$$v_i = D_{ij}/2 + (u_i - u_j)/2 \Leftrightarrow D_{\text{ours/racoon-chien}}/2 + (54,667 - 31,167)/2 = 25,25$$

$$v_j = D_{ij}/2 + (u_j - u_i)/2 \Leftrightarrow D_{\text{ours/racoon-chien}}/2 + (31,167 - 54,667)/2 = 1,75$$



1. Pour chaque feuille calculer $u_i = \sum_{j:j \neq i} D_{ij} / (n-2)$
2. Choisir i et j pour lesquels $D_{ij} - u_i - u_j$ est la plus petite
3. Joindre i et j . Calculer la longueur de la branche i au nouveau nœud v_i et j au nouveau nœud v_j
4. Calculer la distance entre le nouveau nœud (ij) et chaque autre feuille comme $D_{(ij),k} = (D_{ik} + D_{jk} - D_{ij}) / 2$
5. Éliminer les colonnes et les lignes correspondant aux groupes i (ours) et j (racoon) et ajouter celles correspondant au nouveau groupe (ij)
6. Si il reste un seul élément dans la matrice connecter les deux derniers nœuds, sinon retourner en 1.

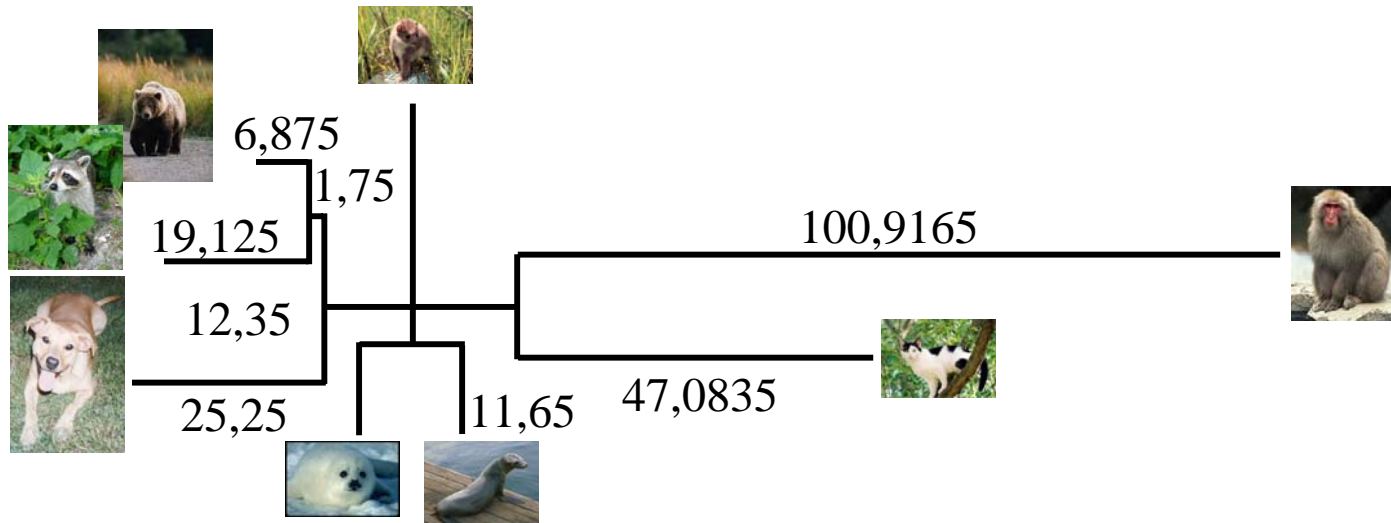


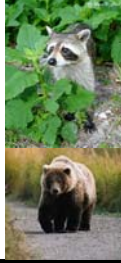


	Chien	Ours Racoon	Belette	Phoque Otarie	Chat Singe
Chien	0				
Ours Racoon	27	0			
Chien Ours Racoon			$(51+25-27)/2=24,5$	$(37+12,5-27)/2=11,25$	$(49+29-27)/2=25,5$
Belette	51	25	0		
Phoque Otarie	37	12,5	29	0	
Chat Singe	49	29	40	29,75	0

$$D_{(ii)k} = (D_{ik} + D_{ik} - D_{ii}) / 2$$

1. Pour chaque feuille calculer $u_i = \sum_{j:j \neq i}^n D_{ij} / (n-2)$
2. Choisir i et j pour lesquels $D_{ij} - u_i - u_j$ est la plus petite
3. Joindre i et j . Calculer la longueur de la branche i au nouveau nœud v_i et j au nouveau nœud v_j
4. Calculer la distance entre le nouveau nœud (ij) et chaque autre feuille comme $D_{(ij),k} = (D_{ik} + D_{jk} - D_{ij}) / 2$
5. **Éliminer les colonnes et les lignes correspondant aux groupes i (ours/racoon) et j (chien) et ajouter celles correspondant au nouveau groupe (ij)**
6. Si il reste un seul élément dans la matrice connecter les deux derniers nœuds, sinon retourner en 1.



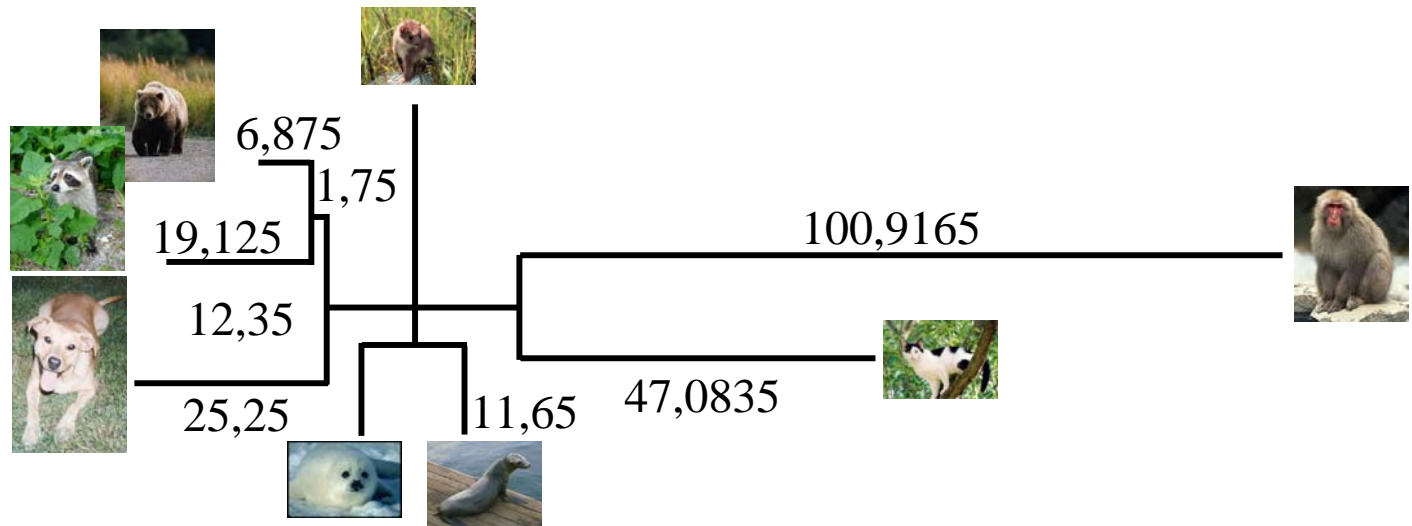


	Chien	Ours Racoon	Belette	Phoque Otarie	Chat Singe
Chien	0				
Ours Racoon	27	0			
Chien Ours Racoon			24,5	11,25	25,5
Belette	51	25	0		
Phoque Otarie	37	12,5	29	0	
Chat Singe	49	29	40	29,75	0

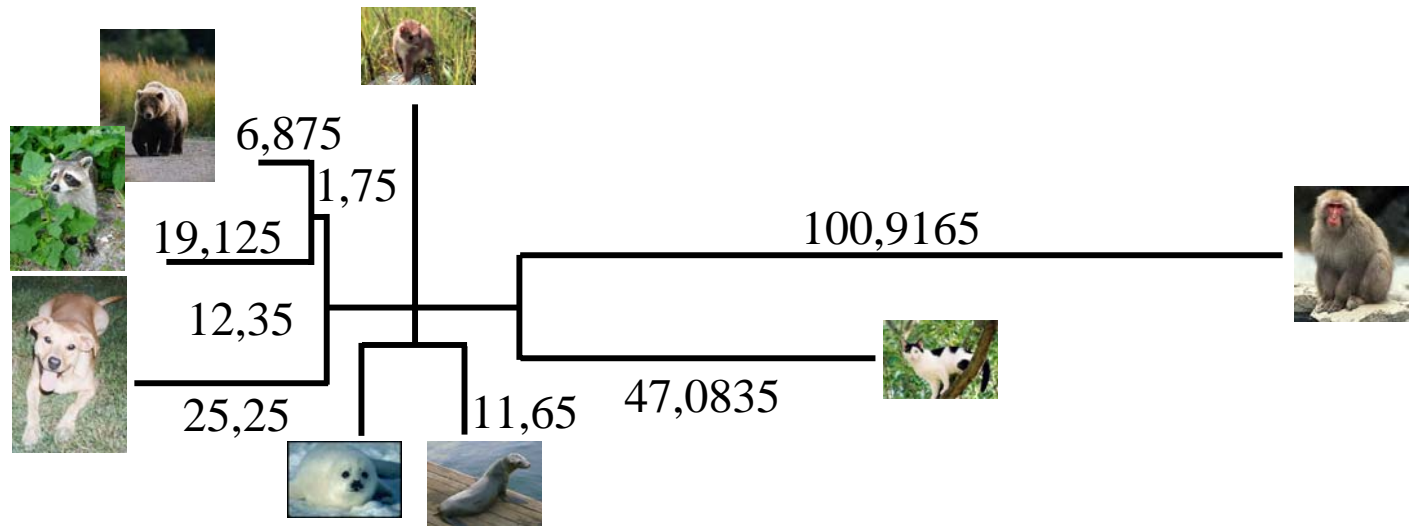


	Chien Ours Racoon	Belette	Phoque Otarie	Chat Singe
Chien Ours Racoon	0			
Belette	24,5	0		
Phoque Otarie	11,25	29	0	
Chat Singe	25,5	40	29,75	0

1. Pour chaque feuille calculer $u_i = \sum_{j:j \neq i}^n D_{ij} / (n-2)$
2. Choisir i et j pour lesquels $D_{ij} - u_i - u_j$ est la plus petite
3. Joindre i et j . Calculer la longueur de la branche i au nouveau nœud v_i et j au nouveau nœud v_j
4. Calculer la distance entre le nouveau nœud (ij) et chaque autre feuille comme $D_{(ij),k} = (D_{ik} + D_{jk} - D_{ij}) / 2$
5. Éliminer les colonnes et les lignes correspondant aux groupes i (ours/racoon) et j (chien) et ajouter celles correspondant au nouveau groupe (ij)
6. Si il reste un seul élément dans la matrice connecter les deux derniers nœuds, sinon retourner en 1.



1. Pour chaque feuille calculer $u_i = \sum_{j:j \neq i}^n D_{ij} / (n-2)$
2. Choisir i et j pour lesquels $D_{ij} - u_i - u_j$ est la plus petite
3. Joindre i et j . Calculer la longueur de la branche i au nouveau nœud v_i et j au nouveau nœud v_j
4. Calculer la distance entre le nouveau nœud (ij) et chaque autre feuille comme $D_{(ij),k} = (D_{ik} + D_{jk} - D_{ij}) / 2$
5. Éliminer les colonnes et les lignes correspondant aux groupes i (ours/racoon) et j (chien) et ajouter celles correspondant au nouveau groupe (ij)
6. Si il reste un seul élément dans la matrice connecter les deux derniers nœuds, sinon retourner en 1.





Chien
Ours
Racoon

Belette

Phoque
Otarie

Chat
Singe

Chien
Ours
Racoon

0

Belette

24,5

0

Phoque
Otarie

11,25

29

0

Chat
Singe

25,5

40

29,75

0

u_i

30,625

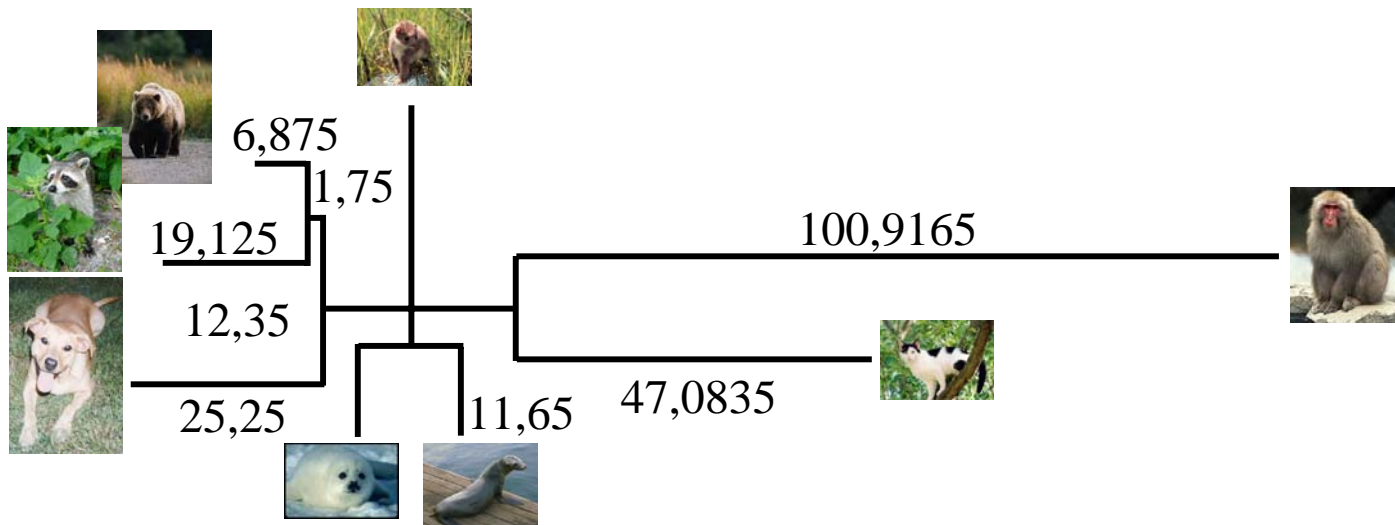
46,75

35

47,625

$$u_i = \sum_{j:j \neq i}^n D_{ij} / (n-2)$$

1. Pour chaque feuille calculer $u_i = \sum_{j:j \neq i} D_{ij} / (n-2)$
2. Choisir i et j pour lesquels $D_{ij} - u_i - u_j$ est la plus petite
3. Joindre i et j . Calculer la longueur de la branche i au nouveau nœud v_i et j au nouveau nœud v_j
4. Calculer la distance entre le nouveau nœud (ij) et chaque autre feuille comme $D_{(ij),k} = (D_{ik} + D_{jk} - D_{ij}) / 2$
5. Éliminer les colonnes et les lignes correspondant aux groupes i (ours/racoon) et j (chien) et ajouter celles correspondant au nouveau groupe (ij)
6. Si il reste un seul élément dans la matrice connecter les deux derniers nœuds, sinon retourner en 1.





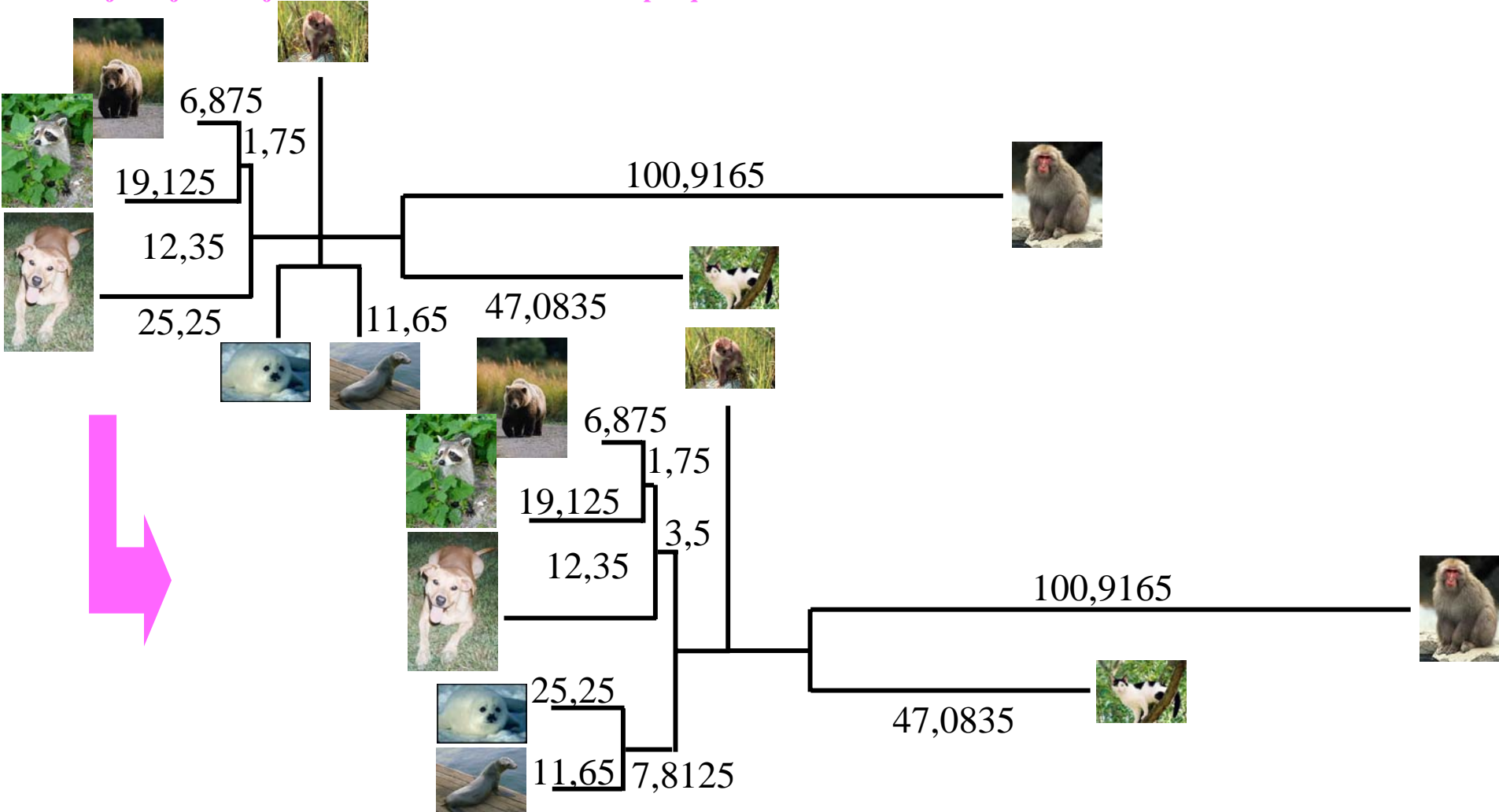
	Chien Ours Racoon	Belette	Phoque Otarie	Chat Singe
Chien Ours Racoon	0	-52,875	-54,375	-52,75
Belette	24,5	0	-52,75	-54,375
Phoque Otarie	11,25	29	0	-52,875
Chat Singe	25,5	40	29,75	0
u_i	30,625	46,75	35	47,625

$D_{ij} - u_i - u_j$ exemple Racoon/Ours/Chien/Belette : $24,5 - 30,625 - 46,75 = -58,834$

3. Joindre i et j ⇔ Joindre ours/racoon/chien et phoque/otarie. Calculer la longueur de la branche i (ours/racoon/chien) au nouveau nœud vi et j (otarie/phoque) au nouveau nœud vj

$$v_i = D_{ij}/2 + (u_i - u_j)/2 \Leftrightarrow D_{\text{ours/racoon/chien-phoque/otarie}}/2 + (30,625 - 35)/2 = 3,4375$$

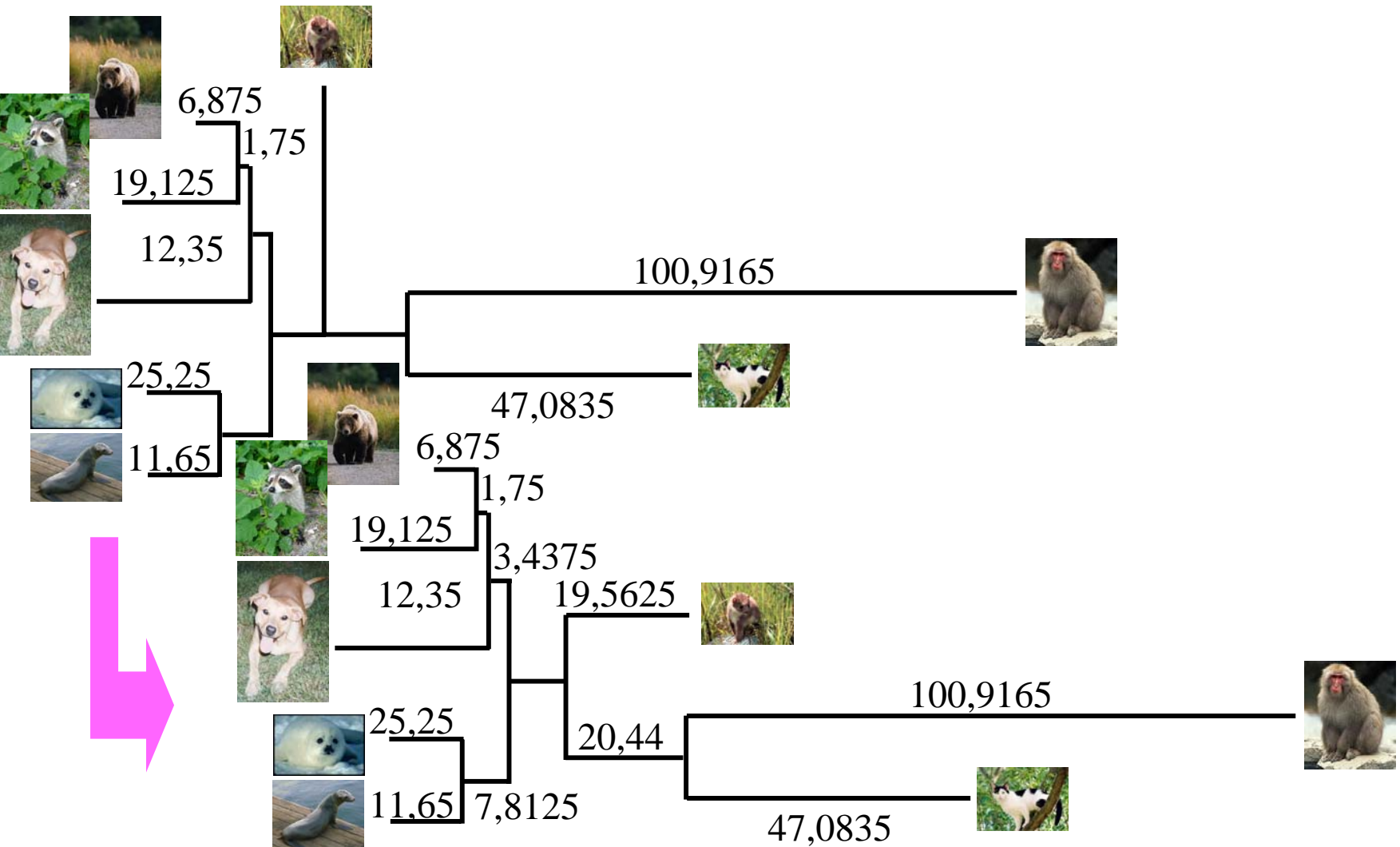
$$v_j = D_{ij}/2 + (u_j - u_i)/2 \Leftrightarrow D_{\text{ours/racoon/chien-phoque/otarie}}/2 + (31,167 - 54,667)/2 = 7,8125$$



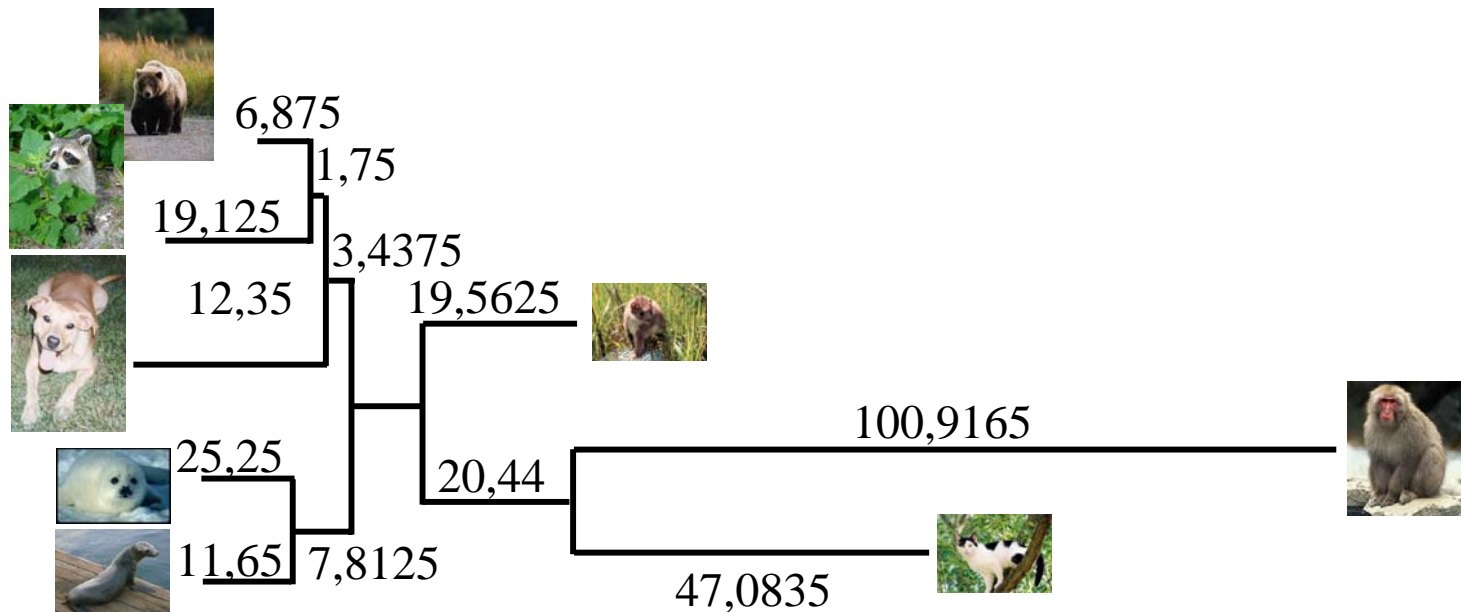
3. Joindre i et j ⇔ Joindre chat/singe et belette. Calculer la longueur de la branche i (chat/singe) au nouveau nœud vi et j (belette) au nouveau nœud vj

$$v_i = D_{ij}/2 + (u_i - u_j)/2 \Leftrightarrow D_{\text{chat/singe-belette}}/2 + (46,75 - 47,625)/2 = 19,5625$$

$$v_j = D_{ij}/2 + (u_j - u_i)/2 \Leftrightarrow D_{\text{chat/singe-belette}}/2 + (47,625 - 46,75)/2 = 20,4375$$

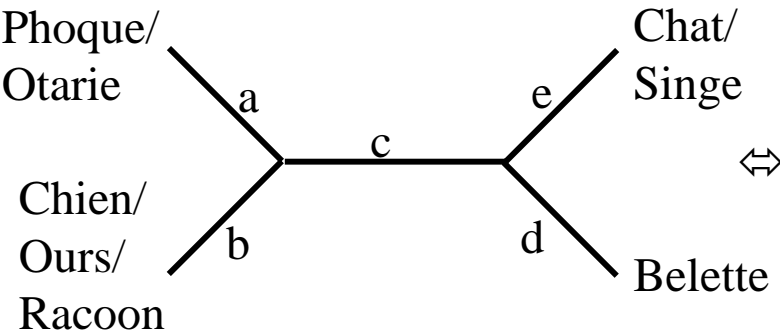


1. Pour chaque feuille calculer $u_i = \sum_{j:j \neq i}^n D_{ij} / (n-2)$
2. Choisir i et j pour lesquels $D_{ij} - u_i - u_j$ est la plus petite
3. Joindre i et j . Calculer la longueur de la branche i au nouveau nœud v_i et j au nouveau nœud v_j
4. Calculer la distance entre le nouveau nœud (ij) et chaque autre feuille comme $D_{(ij),k} = (D_{ik} + D_{jk} - D_{ij}) / 2$
5. Éliminer les colonnes et les lignes correspondant aux groupes i (ours/racoon) et j (chien) et ajouter celles correspondant au nouveau groupe (ij)
6. Si il reste un seul élément dans la matrice connecter les deux derniers nœuds, sinon retourner en 1.





	Chien Ours Racoon	Belette	Phoque Otarie	Chat Singe
Chien/Ours/Racoon	0			
Belette	$z=24,5$	0		
Phoque/Otarie	11,25	$x=29$	0	
Chat/Singe	$y=25,5$	40	$w=29,75$	0



$$\begin{aligned}
 w+x+y+z &= (a+c+e)+(a+c+d)+(b+c+e)+(b+c+d) \\
 4c &= w+x+y+z - 2(a+b) - 2(d+e) \\
 c &= (w+x+y+z) - 2(a+b) - 2(d+e) \\
 c &= (24,5+25,5+29+29,75 - 2 \times 11,25 - 2 \times 40) / 4 \\
 c &= 1,5625
 \end{aligned}$$

1. Pour chaque feuille calculer $u_i = \sum_{j:j \neq i}^n D_{ij} / (n-2)$
2. Choisir i et j pour lesquels $D_{ij} - u_i - u_j$ est la plus petite
3. Joindre i et j . Calculer la longueur de la branche i au nouveau nœud v_i et j au nouveau nœud v_j
4. Calculer la distance entre le nouveau nœud (ij) et chaque autre feuille comme $D_{(ij),k} = (D_{ik} + D_{jk} - D_{ij}) / 2$
5. **Éliminer les colonnes et les lignes correspondant aux groupes i (ours/racoon) et j (chien) et ajouter celles correspondant au nouveau groupe (ij)**
6. Si il reste un seul élément dans la matrice connecter les deux derniers nœuds, sinon retourner en 1.

